Herbst 12 Themennummer 3 Aufgabe 5 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Mit $z_0 = 1 + i$ sei folgende rationale Funktion definiert:

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z_0 - z)^3} \qquad (z \in \mathbb{C}\backslash\{1, z_0\}).$$

Bestimmen Sie (am einfachsten mit Hilfe der geometrischen Reihe) jeweils die Laurent-Reihen von f um $z = z_0$ bzw. $z = 1$ mit ihren maximalen Konvergenzringen. Geben Sie jeweils die Hauptteile der Reihen an.

Lösungsvorschlag:

Vorbereitung: Die geometrische Reihe konvergiert für $|z| < 1$; es gilt also $\frac{1}{1-z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ für $|z| < 1$ und $\frac{1}{1-z} = \frac{1}{z}\frac{1}{\frac{1}{z}-1} = -z^{-1}\frac{1}{1-z^{-1}} = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} z^{-n}$ für $|z| > 1 \iff |\frac{1}{z}| < 1$.
Mit dem Cauchyprodukt erhalten wir

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{n} 1) z^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n$$

und

$$\frac{1}{(1-z)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty}(n+1) z^n = \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{n} (k+1)) z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{2}z^n$$

jeweils für $|z| < 1$.
Daraus folgt $\frac{1}{(1-z)^3} = \frac{1}{z^3}\frac{1}{(\frac{1}{z}-1)^3} = -\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2} z^{-(n+3)}$ für $|z| > 1 \iff |\frac{1}{z}| < 1$.
Laurentreihen konvergieren auf den maximalen Kreisringen im Definitionsbereich einer holomorphen Funktion. Wir müssen also vier Laurentreihen von f bestimmen.
Wir definieren $K(a, b, z_0) = \{z \in \mathbb{C} : a < |z - z_0| < b\}$ mit $0 \leq a < b \leq \infty, z_0 \in \mathbb{C}$.
Beachte $|1 - z_0| = | - i| = 1$.
Wir bestimmen ein paar weitere Darstellungen von f. Es gilt

$$f(z) = \frac{1}{1 - \frac{z_0 - z}{i}} \cdot \frac{-i}{(z_0 - z)^3} = \frac{1}{(z-1)(1+i-z)^3} = \frac{i}{z-1} \cdot \frac{1}{(1-\frac{z-1}{i})^3};\ 1 \neq z \neq z_0.$$

$K(0,1,1)$: Aus $0 < |z - 1| < 1$ folgt $1 \neq z \neq z_0$ und $|\frac{z-1}{i}| < 1$. Daher ist

$$f(z) = \frac{i}{z-1} \cdot \frac{1}{(1-\frac{z-1}{i})^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2i^{n-1}}(z-1)^{n-1}$$

mit Hauptteil $\frac{i}{z-1}$.

$K(1,\infty,1):$ Aus $1 < |z-1| < \infty$ folgt $1 \neq z \neq z_0$ und $|\frac{z-1}{i}| > 1$. Daher ist

$$f(z) = \frac{i}{z-1} \cdot \frac{1}{(1-\frac{z-1}{i})^3} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)i^n}{2}(z-1)^{-(n+4)}.$$

Dies ist bereits der Hauptteil.

$K(0,1,z_0):$ Aus $0 < |z-z_0| < 1$ folgt $1 \neq z \neq z_0$ und $|\frac{z_0-z}{i}| < 1$. Daher ist

$$f(z) = \frac{1}{1-\frac{z_0-z}{i}} \cdot \frac{-i}{(z_0-z)^3} = \frac{i}{(z-z_0)^3}\sum_{n=0}^{\infty} i^n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} i^{n+1}(z-z_0)^{n-3}$$

mit Hauptteil $\frac{i}{(z-z_0)^3} - \frac{1}{(z-z_0)^2} - \frac{i}{z-z_0}$.

$K(1,\infty,z_0):$ Aus $1 < |z-z_0| < \infty$ folgt $1 \neq z \neq z_0$ und $|\frac{z_0-z}{i}| > 1$. Daher ist

$$f(z) = \frac{1}{1-\frac{z_0-z}{i}} \cdot \frac{-i}{(z_0-z)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} -i^{n+1}(z-z_0)^{-(n+3)}.$$

Dies ist bereits der Hauptteil.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$