Herbst 12 Themennummer 3 Aufgabe 4 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

> Berechnen Sie das Integral
>
> $$\int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^2-i}\,\mathrm{d}x \qquad (i=\sqrt{-1}).$$

Lösungsvorschlag:

Wir überprüfen zunächst die Existenz dieses uneigentlichen Integrals. Dafür teilen wir den Integranden in Real- und Imaginärteil auf. Es gilt $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{x^2-i} = \dfrac{x^{\frac{5}{2}}}{x^4+1} + i\dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{x^4+1}$.
Auf $[0,\infty)$ sind die beiden reellwertigen Funktionen $u(x) := \dfrac{x^{\frac{5}{2}}}{x^4+1}, v(x) := \dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{x^4+1}$ integrierbar, denn es handelt sich um stetige, wohldefinierte Funktionen (Nenner verschwindet nie; nichtnegative Argumente sind radizierbar), auf [0,1] sind diese daher integrierbar. Auf $[1,\infty)$ können wir gegen $x^{-\frac{3}{2}}$ und $x^{-\frac{7}{2}}$ abschätzen; diese sind bekanntermaßen integrierbar auf $[1,\infty)$. Damit existieren die Integrale von Real- und Imaginärteil und per Definitionem existiert auch das gesuchte Integral.
Zur Berechnung des Integrals substituieren wir zunächst $x := t^2$; dies führt auf das Integral $\int_0^\infty \frac{2t^2}{t^4-i}\,\mathrm{d}t =: I$, welches wir mit dem Residuensatz berechnen werden.
Mittels der Wege $\gamma_1^R : [0,R] \to \mathbb{C}, t \mapsto t$ sehen wir $I = \lim\limits_{R\to\infty} \int_{\gamma_1^R} f(z)\mathrm{d}z$, wobei f die holomorphe Funktion $f : \mathbb{C}\backslash D \to \mathbb{C}, f(z) = \frac{2z^2}{z^4-i}$ und $D \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ die vierelementige Nullstellenmenge des Nenners $z^4 - i$ sei.
Durch Hinzunahme der Wege $\gamma_2^R : [0,\pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto Re^{\frac{it}{2}}; \gamma_3^R : [0,R] \to \mathbb{C}, t \mapsto (R-t)i$ erhalten wir für $R > 1$ die geschlossenen, stückweise stetig differenzierbaren Wege $\gamma^R := \gamma_1^R + \gamma_2^R + \gamma_3^R$, die vollständig im Definitionsgebiet von f verlaufen. Die Menge $\mathbb{C}$ ist offen und konvex; damit sind alle Voraussetzungen des Residuensatzes erfüllt.
Die Wege γ^R umkreisen nur die Singularität $w := e^{\frac{i\pi}{8}}$ von f und das einmal in positivem Sinne. Da es sich um einen Pol erster Ordnung von f handelt, beträgt das Residuum in diesem Punkt $\mathrm{Res}_w(f) = \dfrac{1}{2w}$ nach der Residuenformel.
Wir untersuchen als Nächstes die Beiträge der Wege γ_2^R, γ_3^R.

γ_2^R : Die Länge dieser Wege beträgt $\dfrac{\pi R}{2}$. Ihre Spur verläuft vollständig in der Menge $\{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$; auf dieser Menge ist $|f|$ nach der umgekehrten Dreiecksungleichung durch $\dfrac{2R^2}{R^4-1}$ beschränkt. Nach der Standardabschätzung gilt $0 \le |\int_{\gamma_2^R} f(z)\mathrm{d}z| \le \dfrac{\pi R^3}{R^4-1}$, was für $R \to \infty$ gegen 0 konvergiert. Der Beitrag zum Integral verschwindet also im Unendlichen.

γ_3^R : Wir setzen die Definition ein:

$$\int_{\gamma_3^R} f(z)\mathrm{d}z = \int_0^R \frac{-2(R-t)^2}{(R-t)^4-i}\cdot(-i)\ \mathrm{d}t = -i\int_R^0 \frac{2t^2}{t^4-i}\ \mathrm{d}t = i\int_{\gamma_1^R} f(z)\mathrm{d}z,$$

wobei wir $(\gamma_3^R)' \equiv -i$ und die Substitution $s = R - t$ benutzt haben.

Unter Zunahme aller bisherigen Ergebnisse erhalten wir

$$\frac{\pi i}{e^{\frac{i\pi}{8}}} = 2\pi i \ \mathrm{Res}_w(f) = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z = \lim_{R\to\infty} \sum_{j=1}^{3} \int_{\gamma_j^R} f(z)\mathrm{d}z = (1+i)I.$$

Es folgt $I = \dfrac{\pi i}{(1+i)e^{\frac{i\pi}{8}}} = \frac{\pi e^{i\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}e^{i\frac{\pi}{8}}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{8}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}(\cos(\frac{\pi}{8})+i\sin(\frac{\pi}{8})) = \pi\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}$.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$