Herbst 12 Themennummer 3 Aufgabe 3 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Berechnen Sie die (lokale) Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} \frac{t}{1-t^2} & 1 \\ 0 & \frac{2t}{1-t^2} \end{pmatrix} y$$

jeweils zum Anfangswert

a) $y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $y(2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Lösungsvorschlag:

a) Wir schreiben $y(t) = (y_1(t), y_2(t))$, dann erhalten wir das Anfangswertproblem $y_2'(t) = \frac{2t}{1-t^2} y_2(t), y_2(0) = 2$; dessen Lösung ist $\frac{2}{1-t^2}$.
Daraus ergibt sich das Anfangswertproblem $y_1'(t) = \frac{t}{1-t^2} y_1(t) + \frac{2}{1-t^2}, y_1(0) = 0$. Die homogene Lösung ist $u(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$; mittels $y_1(t) = c(t)u(t)$ erhalten wir $c'(t) = \frac{2}{\sqrt{1-t^2}}, c(0) = 0$, also $c(t) = 2\arcsin(t)$.
Daher lautet die Lösung, die auf $(-1{,}1)$ existiert, $y(t) = (\frac{2\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}}, \frac{2}{1-t^2})$.

b) Wir gehen wie bei a) vor. Hier erhalten wir $y_2(t) = \frac{1}{1-t^2}$.
Wir folgern $y_1'(t) = \frac{t}{1-t^2} y_1(t) + \frac{1}{1-t^2}$. Die homogene Lösung lautet nun $u(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}$ und aus $y_1(t) = c(t)u(t)$ folgt $c'(t) = -\frac{1}{\sqrt{t^2-1}}, c(2) = 0$. Das wiederum führt zu $c(t) = \operatorname{arcosh} 2 - \operatorname{arcosh} t$.
Daher lautet die Lösung, die auf $(1, \infty)$ existiert, $y(t) = \left((\frac{\operatorname{arcosh} 2 - \operatorname{arcosh} t}{\sqrt{t^2-1}}, \frac{1}{1-t^2} \right)$.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$