Herbst 12 Themennummer 3 Aufgabe 1 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Bestimmen Sie jeweils für $w_0 = 1$ und $w_0 = \sqrt{2}$ die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{y} + 2y = 2\cos w_0 t\ .$$

Lösungsvorschlag:

Die charakteristische Gleichung der homogenen Differentialgleichung lautet $0 = x^2 + 2$ was die einfachen Lösungen $x = \pm\sqrt{2}i$ besitzt. Daher lautet die allgemeine homogene Lösung $a\cos(\sqrt{2}t) + b\sin(\sqrt{2}t);\ a, b \in \mathbb{R}$.
Um die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichungen anzugeben, müssen wir nur eine partikuläre Lösung finden.

$w_0 = 1:$ Wir testen den Ansatz $y(t) = a\cos t + b\sin t$. Dann ist $y''(t) + 2y(t) = a\cos t + b\sin t$.
Für $a = 2, b = 0$ erhalten wir eine partikuläre Lösung durch $y(t) = 2\cos t$.
Die allgemeine Lösung lautet $y(t) = 2\cos t + a\cos(\sqrt{2}t) + b\sin(\sqrt{2}t);\ a, b \in \mathbb{R}$.

$w_0 = \sqrt{2}:$ Wir testen den Ansatz $y(t) = at\cos(\sqrt{2}t) + bt\sin(\sqrt{2}t)$. Dann ist $y''(t) + 2y(t) = 2\sqrt{2}(b\cos(\sqrt{2}t) - a\sin(\sqrt{2}t))$. Für $a = 0, b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ erhalten wir eine partikuläre Lösung durch $y(t) = \frac{t}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}t)$.
Die allgemeine Lösung lautet $y(t) = \frac{t}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}t) + a\cos(\sqrt{2}t) + b\sin(\sqrt{2}t);\ a, b \in \mathbb{R}$.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$