Herbst 12 Themennummer 1 Aufgabe 5 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

a) Bestimmen Sie das Volumen des Körpers im dreidimensionalen Anschauungsraum, der durch die Ebene $z = 0$, die Fläche $z = x^2 + 2y^2$ und die Ebenen $x + y = 1, -x + y = 1, x - y = 1$ und $-x - y = 1$ berandet wird.

b) Sei R das Gebiet in der euklidischen Ebene, das durch die Kurven $xy = \frac{\pi}{4}, xy = \frac{\pi}{2}, y(2 - x) = 2$ und $y(2 - x) = 4$ berandet wird. Bestimmen Sie das Integral

$$\int_R y \cos(xy)\ \mathrm{d}(x, y).$$

Hinweis: Transformationssatz mit $x = 2v/(u + v)$ und $y = u + v$.

Lösungsvorschlag:

a) Der Körper kann durch Ungleichungen beschrieben werden, und zwar als die Menge

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq x^2 + 2y^2, -1 \leq x + y \leq 1, -1 \leq x - y \leq 1\}.$$

Das Volumen dieses Körpers entspricht dem Integral der Funktion $f(x, y) := x^2+2y^2$ über die Menge $Q := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x + y \leq 1, -1 \leq x - y \leq 1\}$.
Die Ungleichung führen wegen $-2 = -1+-1 \leq x+y-x+y \leq 1+1$ auf $-1 \leq y \leq 1$ und ähnlich auf $-1 \leq x \leq 1$. (Zur Veranschaulichung: Die Menge Q entspricht der abgeschlossenen Einheitskugel bezüglich der 1-Norm. Dies ist das Quadrat mit den Ecken (-1,0), (0,-1), (1,0), (0,1).)
Das Volumen erhalten wir daher nach dem Satz von Fubini durch das Integral

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1+|x|}^{1-|x|} f(x, y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \left[x^2y + \frac{2}{3}y^3\right]_{y=-1+|x|}^{y=1-|x|} \mathrm{d}x =$$
$$\int_{-1}^{1} 2x^2(1 - |x|) + \frac{4}{3}(1 - |x|)^3 = 2\int_0^1 2x^2(1 - x) + \frac{4}{3}(1 - x)^3\,\mathrm{d}x =$$
$$2\left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}(1 - x)^4\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right) = 1.$$

b) Es gilt $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\pi}{4} \leq xy \leq \frac{\pi}{2}, 2 \leq y(2 - x) \leq 4\}$. Mit der Transformation aus dem Hinweis muss $\frac{\pi}{4} \leq xy = 2v \leq \frac{\pi}{2}$ und $2 \leq y(2 - x) = 2u \leq 4$, also $1 \leq u \leq 2, \frac{\pi}{8} \leq v \leq \frac{\pi}{4}$ gelten.
Die Funktion $J : (1{,}2) \times (\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}) \to R^\circ, J(u, v) = (\frac{2v}{u+v}, u + v)$ ist ein Diffeomorphismus; die stetige Differenzierbarkeit und Wohldefiniertheit (Nenner verschwindet nie) sind klar. Die Funktion $J^{-1} : R^\circ \to (1{,}2) \times (\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}), J^{-1}(x, y) = (\frac{y(2-x)}{2}, \frac{xy}{2})$ ist die Umkehrfunktion von J, weil $J(J^{-1}(x, y)) = (\frac{xy}{y}, \frac{2y}{2}) = (x, y)$ und $J^{-1}(J(u, v)) = (u + v - v, v) = (u, v)$ für alle $(x, y) \in R^\circ$ und $(u, v) \in (1{,}2) \times (\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4})$ gilt, und ist selbst stetig differenzierbar. Daher sind J und J^{-1} Diffeomorphismen.

Die Jacobimatrix von J lautet $DJ(u,v) = \begin{pmatrix} -\frac{2v}{(u+v)^2} & \frac{2u}{(u+v)^2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und besitzt als Betragsdeterminante $\frac{2}{u+v}$. Nach dem Transformationssatz können wir das angegebene Integral also mittels

$$\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \int_1^2 2\cos(2v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} 2\cos(2v)\,\mathrm{d}v = [\sin(2v)]_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

berechnen. Dabei ist zu beachten, dass der Rand von R eine Nullmenge ist, das Integral über R also mit dem Integral über R° übereinstimmt, welches wir mit dem Transformationssatz berechnet haben.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$