Herbst 12 Themennummer 2 Aufgabe 3 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

a) Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $c \in D$ und seien f und g auf D holomorph. Weiter habe g in c eine Nullstelle zweiter Ordnung. Zeigen Sie, dass

$$Res_c \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{6f'(c)g''(c) - 2f(c)g'''(c)}{3(g''(c))^2}.$$

(b) Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $c \in D$, und die auf $D \backslash \{c\}$ holomorphe Funktion h habe in c einen Pol m-ter Ordnung, $m \geq 1$. Sei p ein Polynom vom Grad $n \geq 1$. Zeigen Sie, dass $p \circ h$ in c einen Pol der Ordnung mn besitzt.

Lösungsvorschlag:

a) Wir halten zunächst fest, dass der rechtsstehende Ausdruck wohldefiniert ist. Weil c eine Nullstelle zweiter Ordnung von g ist, gilt $g''(c) \neq 0$ und der Nenner verschwindet nicht. Als holomorphe Funktionen, besitzen f und g die Ableitungen beliebiger Ordnung in jedem Punkt in D und somit auch in c.
Wir unterscheiden drei Fälle; falls f bei c eine Nullstelle habe, sei o deren Ordnung:

$f(c) = 0,\ o \geq 2:$ In diesem Fall besitzt die rationale Funktion $\frac{f}{g}$ bei c eine hebbare Singularität und das Residuum verschwindet. Weil c eine mindestens doppelte Nullstelle von f ist, gilt $f(c) = 0 = f'(c)$. Damit verschwinden beide Seiten der behaupteten Gleichung, stimmen also überein. In diesem Fall gilt die Behauptung.

$f(c) = 0,\ o = 1:$ Die rationale Funktion $\frac{f}{g}$ besitzt einen Pol erster Ordnung bei c. Wegen $o = 1$ sind die Funktionen $\frac{f}{z-c}, \frac{g}{z-c}$ holomorph fortsetzbar auf D; wir bezeichnen die Fortsetzungen mit $\hat{f}, \hat{g}$. Die Residuenformel für Pole besagt dann

$$\mathrm{Res}_c\left(\frac{f}{g}\right) = \mathrm{Res}_c\left(\frac{\frac{f}{z-c}}{\frac{g}{z-c}}\right) = \mathrm{Res}_c\left(\frac{\hat{f}}{\hat{g}}\right) = \frac{\hat{f}(c)}{\hat{g}'(c)}.$$

Aus der Taylordarstellung ersehen wir $\hat{f}(c) = f'(c)$ und $\hat{g}'(c) = \frac{g''(c)}{2}$. Aus $o = 1$ folgt $f(c) = 0$ und wegen $g''(c) \neq 0$ somit

$$\mathrm{Res}_c\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{2f'(c)}{g''(c)} = \frac{6f'(c)g''(c)}{3(g''(c))^2} - \frac{0}{3(g''(c))^2} = \frac{6f'(c)g''(c) - 2f(c)g'''(c)}{3(g''(c))^2}.$$

$f(c) \neq 0:$ In diesem Fall handelt es sich bei c um einen Pol zweiter Ordnung von $\frac{f}{g}$. Die Polformel besagt, unter Benutzung der Taylorformel und Kürzung von $(z-c)^2$, dass

$$\mathrm{Res}_c\left(\frac{f}{g}\right) = \lim_{z\to c}\left(\frac{f}{g}(z-c)^2\right)' = \lim_{z\to c}\left(\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(z-c)^n}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{g^{(n+2)}(c)}{(n+2)!}(z-c)^n}\right)'$$

Wir bezeichnen die Potenzreihe im Zähler mit $\tilde{f}(z)$ und die Potenzreihe im Nenner mit $\tilde{g}(z)$, dann erhalten wir durch Ausnutzung der Stetigkeit der Potenzreihen und der Quotientenregel

$$\operatorname{Res}_c\left(\frac{f}{g}\right) = \lim_{z\to c} \frac{\tilde{f}'(z)\tilde{g}(z) - \tilde{f}(z)\tilde{g}'(z)}{(\tilde{g}(z))^2} = \frac{\tilde{f}'(c)\tilde{g}(c) - \tilde{f}(c)\tilde{g}'(c)}{(\tilde{g}(c))^2}.$$

Aus der Potenzreihendarstellung können wir diese Werte ablesen und erhalten schließlich durch Erweitern mit 12

$$\operatorname{Res}_c\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f'(c)\cdot\frac{g''(c)}{2} - f(c)\cdot\frac{g'''(c)}{6}}{\frac{(g''(c))^2}{4}} = \frac{6f'(c)g''(c) - 2f(c)g'''(c)}{3(g''(c))^2}.$$

(b) Wir zeigen, dass $(p\circ h)\cdot(z-c)^{mn}$ beschränkt um c ist, während $(p\circ h)\cdot(z-c)^{mn-1}$ um c unbeschränkt ist, dann folgt die Aussage aus der Charakterisierung von Polen und Polordnungen.
Weil p ein Polynom n-ten Grades sein soll, gibt es $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{C}, a_n \neq 0$ mit $p(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$.
Weil h einen Pol m-ter Ordnung bei c besitzt, finden wir eine auf D holomorphe Funktion q mit $q(c) \neq 0$ und $h(z) = (z-c)^{-m}q(z)$.

$h(z)\cdot(z-c)^{mn}$: Es gilt

$$(p\circ h)\cdot(z-c)^{mn} = \sum_{k=0}^{n} a_k h(z)^k \cdot (z-c)^{mn} = \sum_{k=0}^{n} a_k q(z)^k (z-c)^{(n-k)m},$$

was holomorph und daher beschränkt um c ist.

$h(z)\cdot(z-c)^{mn-1}$: Eine analoge Rechnung zeigt $(p\circ h)\cdot(z-c)^{mn-1} = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k h(z)^k\cdot(z-c)^{mn-1} = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k q(z)^k (z-c)^{(n-k)m-1}$. Für die Folge $z_l = c + \frac{1}{l}$ erhalten wir

$$(p\circ h)\cdot(z_l - c)^{mn-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k q(z_l)^k \cdot l^{1+m(k-n)} + a_n q(z_l)\cdot l.$$

Die Summe konvergiert für $l \to \infty$ gegen 0, der zweite Term divergiert allerdings betragsmäßig gegen ∞, weil wir für hinreichend großes $L \in \mathbb{N}$ und alle $l \geq L$ die Abschätzung $|a_n q(z_l) l| \geq \frac{|a_n q(c)|}{2} l$ erhalten, was gegen ∞ divergiert, weil der Faktor $\frac{|a_n q(c)|}{2}$ nicht verschwindet.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$