Herbst 12 Themennummer 2 Aufgabe 2 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

(a) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion mit der Eigenschaft, dass $|f(z)| \geq \pi$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt. Zeigen Sie, dass $f(z) = f(\pi)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt.

(b) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion mit der Eigenschaft, dass $f(z+1) = f(z) = f(z+i)$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass f konstant ist.

Lösungsvorschlag:

(a) Wegen $f(z) = 0 \iff |f(z)| = 0$ und $0 < \pi$ besitzt f keine Nullstelle. Die Funktion $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ g(z) = \frac{1}{f(z)}$ ist ebenso ganz und erfüllt $|g(z)| \leq \frac{1}{\pi}$ für alle $z \in \mathbb{C}$, ist also beschränkt. Nach dem Satz von Liouville ist g konstant und für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{g(\pi)} = f(\pi).$$

(b) Aus den Voraussetzungen folgt iterativ $f(z + a + bi) = f(z)$ für alle $a, b \in \mathbb{Z}$. Mit der Abrundungsfunktion $\lfloor \cdot \rfloor$ können wir für alle $z = x + iy \in \mathbb{C}$ z auch als $z = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor i + x - \lfloor x \rfloor + (y - \lfloor y \rfloor)i$ schreiben, wobei $0 \leq x - \lfloor x \rfloor, y - \lfloor y \rfloor < 1$ gilt. Wegen $\lfloor x \rfloor, \lfloor y \rfloor \in \mathbb{Z}$ folgt $f(x + iy) = f(x - \lfloor x \rfloor + (y - \lfloor y \rfloor)i)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.
Die Menge $M := \{z = x + iy \in \mathbb{C} : 0 \leq x, y \leq 1\} \subset \mathbb{C}$ ist abgeschlossen und beschränkt, also kompakt. Als ganze Funktion ist f stetig auf M und daher auch $|f|$. Letztere besitzt ein Maximum K auf M. Es folgt

$$|f(x + iy)| = |f(x - \lfloor x \rfloor + (y - \lfloor y \rfloor)i)| \leq K$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Demnach ist f beschränkt (auf $\mathbb{C}$) und nach dem Satz von Liouville konstant.

$\mathcal{J.F.B.}$