Herbst 12 Themennummer 2 Aufgabe 1 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Sei $B(z_0, r)$ die offene Kreisscheibe mit Mittelpunkt z_0 und Radius $r > 0$ in der komplexen Ebene.

a) Bestimmen Sie alle Nullstellen und alle isolierten Singularitäten der Funktion

$$f(z) = \frac{z^2(z-4)}{\sin(\pi z)}$$

sowie die Ordnung der Nullstellen und Polstellen von f, so welche vorliegen.

(b) Sei f die Funktion aus Aufgabenteil (a). Bestimmen Sie das Integral

$$\int_{\partial B(3/2,1)} f(z)\mathrm{d}z.$$

(c) Bestimmen Sie das Integral

$$\int_{\partial B(0,4)} \frac{\cos z}{(z+1)^3}\mathrm{d}z$$

Lösungsvorschlag:

a) Bei der Nullstellenmenge des Nenners handelt es sich um die ganzen Zahlen, wobei jede Nullstelle einfach ist.
Der Zähler verschwindet genau für $z = 0$ und $z = 4$; 0 ist eine doppelte Nullstelle und 4 eine einfache.
Die Singularitäten 0 und 4 sind hebbar. Die holomorphe Fortsetzung von f auf $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z} \ \cup \{0,4\}$ besitzt eine einfache Nullstelle in 0 und Pole erster Ordnung in $\mathbb{Z}\backslash\{0,4\}$. f selbst hat die gleichen Pole und Ordnungen, besitzt streng genommen aber keine Nullstelle. In 0 und 4 besitzt f hebbare Singularitäten.

(b) Die Menge $B(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ ist offen und konvex, die Menge $\{1,2\}$ ist endlich. Auf der Menge $B(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})\backslash\{1,2\}$ ist f holomorph und sie enthält die glatte, geschlossene Kurve $\gamma : [0,2\pi] \ni t \mapsto \frac{3}{2} + e^{it}$, die $\partial B(\frac{3}{2}, 1)$ genau einmal in positivem Sinn parametrisiert.
Die Singularitäten 1 und 2 werden dabei beide genau einmal positiv umrundet.
Nach dem Residuensatz ist das Integral durch $2\pi i(\operatorname{Res}_f(1) + \operatorname{Res}_f(2))$ gegeben; wir berechnen die Residuen mit der Formel für Pole erster Ordnung. Es gilt $\operatorname{Res}_f(z) = \frac{z^2(z-4)}{\pi\cos(\pi z)}$ für $z = 1,2$. Damit erhalten wir, dass der Integralwert durch $2i(3-8) = -10i$ gegeben ist.

(c) Nach der Taylorformel für die Ableitung ist dieses Integral $\frac{2\pi i}{2!}\cos''(-1) = -\pi i\cos(1)$, weil die Wegparametrisierungen von $\partial B(0,4)$ und $\partial B(-1,1)$ homolog in $\mathbb{C}\backslash\{-1\}$ sind.
Alternativ kann man die Anwendbarkeit des Residuensatzes analog zu (b) begründen und das Residuum in -1 mit der allgemeinen Polformel ausrechnen.

J.F.B.