Herbst 12 Themennummer 1 Aufgabe 4 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen des Polynoms $p(z) = 2z^5 - 6z^2 + z + 1$ im Ringgebiet $1 \leq \lvert z\rvert \leq 2$. Sind darunter auch reelle Nullstellen?

Lösungsvorschlag:

Als komplexes Polynom fünften Grades besitzt p genau fünf komplexe Nullstellen (mit Vielfachheit). Wir zeigen zunächst, dass jede Nullstelle in $B_2(0)$ liegt. Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\lvert z\rvert \geq 2$ gilt nämlich $\lvert p(z)\rvert \geq 2\lvert z\rvert^5 - 6\lvert z\rvert^2 - \lvert z\rvert - 1$ nach den Dreiecksungleichungen. Die reellwertige Funktion $q(t) = 2t^5 - 6t^2 - t - 1$ erfüllt für $t \geq 2$ aber

$$q'(t) = 10t^4 - 12t - 1 = 10t \cdot t^3 - 12t - 1 \geq 80t - 12t - 1 = 68t - 1 \geq 135 > 0$$

und ist somit monoton wachsend auf $[2, \infty)$. Wegen $q(2) = 37 > 0$ folgt also $q(t) > 0$ und damit auch $\lvert p(z)\rvert > 0$, also $p(z) \neq 0$ falls $\lvert z\rvert \geq 2$ erfüllt ist.
Wir bestimmen die Anzahl der Nullstellen in $\overline{B_1(0)}$ mit dem Satz von Rouché. Natürlich besitzt p keine Pole. Auf der Kurve $\gamma : [0,2\pi] \ni t \mapsto e^{it}$, die den Rand von $B_1(0)$ parametrisiert, liegen keine Nullstellen von p, denn $\lvert p(z)\rvert > 6\lvert z\rvert^2 - 2\lvert z\rvert^5 - \lvert z\rvert - 1 = 6 - 2 - 1 - 1 = 2 > 0$ gilt für alle $z \in \mathrm{Spur}(\gamma)$. Die gleiche Rechnung zeigt $\lvert 6z^2\rvert > \lvert -2z^5 - z - 1\rvert$ für die gleichen z. Nach dem Satz von Rouché besitzt die Funktion $-p(z) = 6z^2 + (-2z^5 - z - 1)$ genauso viele Nullstellen (mit Vielfachheit) in $B_1(0)$ wie $z \mapsto 6z^2$, also genau zwei Stück. Weil die Nullstellen von p und $-p$ übereinstimmen, besitzt p daher genau zwei Nullstellen in $B_1(0)$ und folglich genau drei im angegebenen Ringgebiet.
Ja es existieren reelle Nullstellen. Weil p als Polynom stetig ist, was auch auf die Einschränkung auf $\mathbb{R} \cap \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq \lvert z\rvert \leq 2\}$ zutrifft, und weil $p(1) = -2 < 0 < 43 = p(2)$ gilt, folgt die Existenz einer reellen Nullstelle von p in (1,2) und damit auch im Ringgebiet $1 \leq \lvert z\rvert \leq 2$ aus dem Zwischenwertsatz (oder Bolzanos Nullstellensatz).

J.F.B.