Herbst 12 Themennummer 1 Aufgabe 1 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Bei richtigen Aussagen verweisen Sie auf einen passenden Satz der Funktionentheorie, bei falschen geben Sie ein Gegenbeispiel.

a) Ist $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in G mit $f(z_n) = 0$ für alle n, so ist $f(z) \equiv 0$.

b) Ist $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in G mit Häufungspunkt und $f(z_n) = 0$ für alle n, so ist $f(z) \equiv 0$.

c) Ist $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in G mit Häufungspunkt in G und $f(z_n) = 0$ für alle n, so ist $f(z) \equiv 0$.

d) Ist f auf G beschränkt, so ist f konstant.

e) Ist $G = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ und f auf G beschränkt, so ist f konstant.

f) Ist $G = \mathbb{C}$ und f auf G beschränkt, so ist f konstant.

Lösungsvorschlag:

a) Diese Aussage ist falsch. Betrachte $f(z) = \cos z$ auf $G = \mathbb{C}$ und $z_n := (2n-1)\frac{\pi}{2}$.

b) Diese Aussage ist falsch. Betrachte $f(z) = \cos(\frac{1}{z})$ auf $G = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ und $z_n := \frac{2}{(2n-1)\pi}$ mit Häufungspunkt 0.

c) Diese Aussage ist wahr, es handelt sich um den Identitätssatz.

d) Diese Aussage ist falsch. Betrachte $f(z) = z$ auf $G := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

e) Diese Aussage ist wahr. Weil f beschränkt ist, ist f auch auf einer Umgebung um 0 beschränkt. Nach Riemanns Hebbarkeitssatz ist 0 eine hebbare Singularität und f besitzt eine holomorphe Fortsetzung auf $\mathbb{C}$. Diese ist nach dem Satz von Liouville konstant. Somit ist f eine Einschränkung einer konstanten Funktion, also ebenfalls konstant.

f) Diese Aussage ist wahr, es handelt sich um den Satz von Liouville.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$