Herbst 11 Themennummer 3 Aufgabe 4 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Sei $f(z) = e^{iz}(z^2+1)^{-2}$ für $z \in \mathbb{C}$ und $z \notin \{i, -i\}$.

a) Bestimmen Sie den Typ der isolierten Singularitäten i und $-i$ der Funktion $f(z)$, und geben Sie das zugehörige Residuum an.

b) Berechnen Sie $\int_{-\infty}^{\infty} \cos(x)(x^2+1)^{-2}\,\mathrm{d}x$.

Lösungsvorschlag:

a) Beide Werte sind doppelte Nullstellen des Nenners $(z^2+1)^2 = (z-i)^2(z+i)^2$ aber keine Nullstellen des Zählers. Daher handelt es sich um Pole zweiter Ordnung. Das Residuum in $\pm i$ erhalten wir durch die Polformel mittels

$$\mathrm{Res}_{\pm i}(f) = \left(\frac{e^{iz}}{(z \pm i)^2}\right)'(\pm i) = \frac{ie^{\mp 1}\cdot(\pm 2i)^2 - 2e^{\mp 1}\cdot(\pm 2i)}{(\pm 2i)^4} = \frac{-4ie^{\mp 1} \mp 4ie^{\mp 1}}{16},$$

also ist $\mathrm{Res}_i(f) = \dfrac{-ie^{-1}}{2}$ und $\mathrm{Res}_{-i}(f) = 0$.

b) Der Integrand ist stetig (der Nenner ist strikt größer als 0) und majorisierbar gegen $\frac{1}{1+x^2} = \arctan'(x)$, was über $\mathbb{R}$ integrierbar ist. Daher existiert das Integral und kann als Limes $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{R\to\infty} \int_{\gamma_1^R} f(z)\mathrm{d}z$ berechnet werden, wobei $\gamma_1^R : [-R, R] \to \mathbb{C},\ t \mapsto t$ sei. Beachte dazu die Eulerformel $e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z)$ und $\int_{-R}^{R} \frac{\sin x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = 0$ für alle $R > 1$, weil der Integrand ungerade ist.
Durch Hinzunahme der Wege $\gamma_2^R : [0, \pi] \to \mathbb{C},\ t \mapsto Re^{it}$ erhalten wir für $R > 1$ geschlossene, stückweise stetig differenzierbare Wege $\Gamma^R = \gamma_1^R + \gamma_2^R$, die durch keine Singularität von f verlaufen, i einmal positiv und $-i$ gar nicht umkreisen. Die Menge $\mathbb{C}$ ist offen und konvex und f ist holomorph auf $\mathbb{C}\backslash\{i, -i\}$ ($\{i, -i\}$ ist endlich). Nach dem Residuensatz ist also $\int_{\Gamma^R} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i\ \mathrm{Res}_i(f) = \frac{\pi}{e}$ für alle $R > 1$.
Die Weglänge von γ_2^R beträgt für alle $R > 1$ πR. Längs der Spur dieser Wege ist $|(z^2+1)^2| \geq (R^2-1)^2$ wegen der umgekehrten Dreiecksungleichung und des streng monotonen Wachstums von $[0,\infty) \ni t \mapsto t^2 \in \mathbb{R}$ und es gilt $|e^{iz}| = e^{-\mathrm{Im} z} \leq 1$. Nach der Standardabschätzung ist $0 \leq |\int_{\gamma_2^R} f(z)\mathrm{d}z| \leq \frac{\pi R}{(R^2-1)^2} \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
Es folgt also

$$\frac{\pi}{e} = \lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)\mathrm{d}z = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_1^R} f(z)\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(x)(x^2+1)^{-2}\,\mathrm{d}x.$$

J.F.B.