H11T3A3

Sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(t,x) \mapsto e^{x^2t^2} + t^2$

a) Berechne die partiellen Ableitungen von F

b) Bestimme zu $x_0 \in \mathbb{R}$ alle Lösungen von

$$xt^2x' + t(x^2 + e^{-x^2t^2}) = 0, \quad x(1) = x_0$$

c) Zeige, dass jede Lösung aus b) maximal auf einem beschränkten Zeitintervall existiert und gebe das Randverhalten der Lösungen an.

Zu a):

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,x) = e^{x^2t^2}2t^2x + 2t$$
$$\frac{\partial F}{\partial x}(t,x) = e^{x^2t^2}2xt^2$$

Zu b):

$2e^{x^2t^2}$ ist hierfür ein integrierender Faktor, denn

$$2e^{x^2t^2}xt^2x' + 2e^{x^2t^2}tx^2 + 2t = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)(t,x)x' + \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)(t,x) = 0$$

und F ist zu dieser exakten Differentialgleichung eine Stammfunktion.
Ist $\lambda : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung von der Differentialgleichung, so gilt

$$e^{x_0^2} + 1 = F(1,x_0) = F(t,\lambda(t)) = e^{\lambda(t)^2 \cdot t^2} + t^2$$
$$e^{\lambda(t)^2 \cdot t^2} = e^{x_0^2} + 1 - t^2$$
$$\lambda(t)^2 = \frac{\ln(e^{x_0^2} + 1 - t^2)}{t^2}$$
$$\lambda(t)^2 = \operatorname{sign}(x_0)\frac{\sqrt{\ln(e^{x_0^2} + 1 - t^2)}}{t}$$

Definiert für $t \neq 0 \to$ Intervall $]0,\infty[$ damit Startzeitpunkt 1 enthalten ist.
$\underbrace{\ln(e^{x_0^2} + 1 - t^2)}_{\Downarrow}$: $e^{x_0^2} + 1 - t^2 > 0$ damit $\ln(..)$ definiert ist.

≥ 0 damit $\sqrt{\ln(...)}$ definiert ist $\Rightarrow e^{x_0^2} + 1 - t^2 \geq 1 \Leftrightarrow e^{x_0^2} \geq t^2$

$\Rightarrow 0 < t \leq \sqrt{e^{x_0^2}} \Rightarrow 1 \leq \sqrt{e^{x_0^2}}$ für $x_0 \neq 0$

Kandidat: $\lambda :]0, \sqrt{e^{x_0^2}}[\to \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{\operatorname{sign} x_0}{t}\sqrt{\ln(e^{x_0^2} + 1 - t^2)}$ (an der oberen Grenze ist λ noch definiert, aber λ' nicht mehr)

$$\lambda(1) = \operatorname{sign}(x_0)\sqrt{x_0^2} = \operatorname{sign}(x_0)|x_0| = x_0$$

$$\lambda'(t) = \frac{\operatorname{sign}(x_0)\Big(t\frac{1}{2\sqrt{\ln(e^{x_0^2}+1-t^2)}} \cdot \frac{1}{e^{x_0^2}+1-t^2}(-2t) - \sqrt{\ln(e^{x_0^2}+1-t^2)}\Big)}{t^2}$$

$$\lambda(t)t^2\lambda'(t) + t(\lambda(t)^2 + e^{-\lambda(t)^2 t^2}) = ... = 0$$

Zu c):

$$\left.\begin{array}{l} |\lambda(t)| \xrightarrow[t \nearrow 0]{} \infty \\ |\lambda'(t)| \xrightarrow[t \searrow \sqrt{e^{x_0^2}}]{} \infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda \text{ lässt sich nicht weiter zu einer Lösung des AWPs fortsetzen.}$$

$$e^{x_0^2} + 1 = F(1, x_0) = F(t, \lambda(t)) = e^{\lambda(t)^2 \cdot t^2} + t^2 \to \frac{\partial F}{\partial x}(1, x_0) = e^{x_0^2} \cdot 2x_0 \neq 0$$

dann ist die Differentialgleichung laut dem Satz über implizite Funktionen lokal eindeutig lösbar. Somit ist das gefundene Intervall das größtmögliche.