Herbst 11 Themennummer 3 Aufgabe 1 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Bestimmen Sie für die Differentialgleichung

$$y'' + \frac{4}{x}y' - \frac{10}{x^2}y = 0$$

alle reellen Lösungen $y(x)$ auf dem Intervall $]0, \infty[$. Benutzen Sie dazu die Substitution $y(x) = z(\ln x)$ mit $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oder eine andere Methode Ihrer Wahl.

Lösungsvorschlag:

Wir verwenden die angegebene Substitution. Aus $y(x) = z(\ln x)$ folgt $y'(x) = \frac{z'(\ln x)}{x}$ und $y''(x) = \frac{z''(\ln x) - z'(\ln x)}{x^2}$. Die zu lösende Gleichung ist für $x > 0$ äquivalent zu $x^2 y''(x) + 4xy'(x) - 10y(x) = 0$, also zu

$$z''(\ln x) + 3z'(\ln x) - 10z(\ln x) = 0.$$

Die allgemeine reelle Lösung der Gleichung $u'' + 3u' - 10u = 0$ ist wegen $t^2 + 3t - 10 = (t-2)(t+5)$ durch $u(t) = ae^{2t} + be^{-5t}$ für $a, b \in \mathbb{R}$ gegeben.
Daher ist $y(x) = ae^{2\ln x} + be^{-5\ln x} = ax^2 + \frac{b}{x^5}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ gegeben.
Dass diese Funktionen Lösungen darstellen kann man leicht nachrechnen. Dass es keine weiteren gibt, folgt aus der allgemeinen Theorie linearer Differentialgleichungen, weil die vorliegende Gleichung von zweiter Ordnung ist.

J.F.B.