Herbst 11 Themennummer 2 Aufgabe 5 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Die Gleichung des mathematischen Pendels mit Reibung lautet

$$y''(t) + \varepsilon y'(t) + \sin(y(t)) = 0, \quad t \geq 0,$$

wobei $\varepsilon > 0$.

a) Überführen Sie diese Gleichung in das zugehörige System erster Ordnung der Form $v'(t) = f(v(t))$ für den Vektor $v = (y, y')$.

b) Bestimmen Sie die kritischen Punkte des Systems aus (a).

c) Untersuchen Sie die kritischen Punkte auf Stabilität und Instabilität.

Lösungsvorschlag:

a) Es ist $v'(t) = (y'(t), y''(t)) = (y'(t), -\varepsilon y'(t) - \sin(y(t))) =: f(y(t), y'(t)) = f(v(t))$.

b) Die kritischen Punkte sind die Nullstellen von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ -\varepsilon y - \sin(x) \end{pmatrix}$, also diejenigen $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $y = 0 = \sin(x)$. Dies ist die Menge $\{(k\pi, 0) : k \in \mathbb{Z}\}$.

c) Wir betrachten die Linearisierung. Es ist $Jf(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos(x) & -\varepsilon \end{pmatrix}$ mit Determinante $\cos(x)$ und Spur $-\varepsilon < 0$.
Für die kritischen Punkte beträgt die Determinante $\cos(k\pi) = (-1)^k$, ist also negativ für ungerade k und positiv für gerade k. Daraus lässt sich ablesen, dass für ungerade k ein Eigenwert der Jacobimatrix mit positivem Realteil existiert und $(k\pi, 0)$ instabil ist, während für gerade k jeder Eigenwert der Jacobimatrix negativen Realteil hat und $(k\pi, 0)$ somit asymptotisch stabil ist.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$