Herbst 11 Themennummer 2 Aufgabe 2 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

> Beantworten Sie die folgenden zwei Fragen zur Funktionentheorie jeweils mit einer kurzen Begründung.
>
> a) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f^{(n)}(0) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Welchen Wert besitzt das Kurvenintegral $\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-1|=R} \frac{f(z)}{z-1} \mathrm{d}z$ für $R > 0$, wobei $|z-1| = R$ den positiv durchlaufenen Kreis um 1 mit Radius R bezeichnet?
>
> b) Gibt es eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(\frac{1}{n}) = \frac{n}{2n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$?

Lösungsvorschlag:

a) Da f holomorph ist, stimmt f auf der maximalen Kreisscheibe um 0, die gänzlich im Definitionsbereich liegt, mit der Taylorentwicklung um 0 überein. Hier bedeutet das, dass

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(n-1)!} = z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = ze^z$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt.
Da f holomorph ist, gilt nach Cauchys Integralformel (oder der Taylorformel) außerdem

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-1|=R} \frac{f(z)}{z-1} \mathrm{d}z = f(1) = e.$$

b) Nein, die gibt es nicht. Angenommen diese gäbe es, dann wäre sie stetig, also würde $f(0) = \frac{1}{2}$ gelten. Wir betrachten die holomorphe Funktion $g : \mathbb{C}\backslash\{2\} \to \mathbb{C}$, $g(z) = \dfrac{1}{2-z}$. Diese stimmt auf der Menge $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ die sich in $0 \in \mathbb{C}\backslash\{2\}$ häuft, mit f überein. Nach dem Identitätssatz stimmen f und g auf $\mathbb{C}\backslash\{2\}$ überein. Weil f aber holomorph in 2 ist, g jedoch einen Pol erster Ordnung in 2 besitzt, also nicht holomorph in 2 fortgesetzt werden kann, erhalten wir einen Widerspruch.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$