Herbst 11 Themennummer 1 Aufgabe 5 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

> Betrachten Sie die Differentialgleichung
>
> $$\dot{x} = -3x + y + 2y^3$$
> $$\dot{y} = -4x$$
>
> und zeigen Sie die asymptotische Stabilität der Ruhelage $(x^*, y^*) = (0{,}0)$ sowohl durch Untersuchung der Linearisierung in (x^*, y^*) als auch durch Verwendung der Lyapunov-Funktion
> $$V(x.y) = 4x^2 - 2xy + y^2 + y^4.$$

Lösungsvorschlag:

Linearisierung: Die Jacobimatrix der Strukturfunktion ist $J(x,y) = \begin{pmatrix} -3 & 6y^2+1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$. Für die gegebene Ruhelage ist die Jacobimatrix $J(0{,}0) = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$, was die zugehörige charakteristische Gleichung $\lambda^2 + 3\lambda + 4 = (-3-\lambda)(-\lambda) + 4 = 0$ mit Lösungen $\lambda_\pm = \frac{-3\pm\sqrt{7}i}{2}$ besitzt. Alle Eigenwerte der Matrix haben also negativen Realteil, nämlich $-\frac{3}{2}$ und $(0{,}0)$ ist asymptotisch stabil. Dass es sich um eine Ruhelage handelt, die Strukturfunktion also eine Nullstelle bei $(0{,}0)$ hat, ist klar.

Lyapunov: Wieder ist klar, dass $(0{,}0)$ eine Ruhelage ist, weil die Strukturfunktion verschwindet. Dass V eine strikte Lyapunovfunktion ist, folgt aus $\nabla V(x,y) = (8x-2y, -2x+2y+4y^3)^{\mathrm{T}}$ und $(-3x+y+2y^3)(8x-2y) - 4x(-2x+2y+4y^3) = -16x^2 - 2y^2 - 4y^4 + 6xy$ $= -(3x-y)^2 - 7x^2 - y^2 - 4y^4 < 0$ für $(x,y) \neq (0{,}0)$.
Wegen $V(x,y) = (x-y)^2 + 3x^2 + y^4 > 0$ für $(x,y) \neq (0{,}0)$ und $V(0{,}0) = 0$ ist $(0{,}0)$ also striktes Minimum einer strikten Lyapunovfunktion und daher asymptotisch stabil.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$