H11T1A4

Berechne die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} e^t,\ x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\det(A - \mu E_3) = \det \begin{pmatrix} -\mu & -1 & 1 \\ 1 & -\mu & 3 \\ 0 & 0 & -1-\mu \end{pmatrix}$$

$$= -(1+\mu)\mu^2 - (1+\mu) = -(1+\mu)(\mu+i)(\mu-1) \quad \text{Eigenwerte: } -1, i, -i$$

$$A + E_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Eig}(A, -1) = \mathrm{lin} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A + iE_3 = \begin{pmatrix} i & -1 & 1 \\ 1 & i & 3 \\ 0 & 0 & -1+i \end{pmatrix} \xrightarrow[(II)+i(I)]{} \begin{pmatrix} i & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3+i \\ 0 & 0 & -1+i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} i & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Eig}(A, -i) = \mathrm{lin} \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Eig}(A, i) = \mathrm{lin} \begin{pmatrix} -i \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ (Realteile für } T \text{ verwenden)}$$

$$T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ transformiert auf reelle Jordanform:}$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = J$$

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & \cos(t) & \sin(t) \\ 0 & -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$$

Da $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E_2$

$$\Rightarrow e^{t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)^k}{k!} =$$

$$\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l \frac{t^{2l}}{(2l)!}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l \frac{t^{2l+1}}{(2l+1)!}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$$

$$e^{tA} = Te^{tJ}T^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & -2e^{-t} - \sin(t) + 2\cos(t) \\ \sin(t) & \cos(t) & -e^{-t} + \cos(t) + 2\sin(t) \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

Lösung von $\dot{x} = Ax + e^t \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist gegeben als

$$\lambda(t) = e^{tA}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{tA}\int_0^t \underbrace{e^{-sA}e^s\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}}_{(*)} ds = e^{tA}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{tA}\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\int_0^t e^{2s} ds$$

$$= e^{tA}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{-t}\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\frac{1}{2}e^{2s}\Big|_0^t = \begin{pmatrix} 3\cos(t) - 2\sin(t) - 2e^t \\ 3\sin(t) + 2\cos(t) - e^t \\ e^t \end{pmatrix}$$

(*) Da $\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Eig}(A, -1) \Rightarrow e^{-sA}\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = e^{-(-1)s}\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ gilt.