H11T1A3

a) Es sei $P(z) := \sum_{k=0}^n a_k z^k$ ein Polynom vom genauen Grad $n \geq 1$ und $m \in \{1, \dots, n\}$. Für ein $r > 0$ gelte

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k| \cdot r^k < 2|a_m| \cdot r^m.$$

Zeige, dass P genau m Nullstellen in $U_r(0)$ und genau $n-m$ Nullstellen in $\mathbb{C}\backslash\overline{U_r(0)}$ hat (jeweils mit Vielfachheiten gezählt). Belege durch ein Beispiel, dass dies im Allgemeinen falsch ist, wenn man nur $\sum_{k=0}^n |a_k| \cdot r^k \leq 2|a_m| \cdot r^m$ voraussetzt.

b) Zeige, dass

$$\int_{|z|=2} \frac{1}{z^5 + 12z^2 + i} dz = \int_{|z|=1} \frac{1}{z^5 + 12z^2 + i}$$

gilt. (*Hinweis:* Wende a) an.)

Zu a):

Man setzt $f(z) := 2a_m z^m$ und $g(z) := P(z) - f(z)$. Um den Satz von Rouché anwenden zu können zeigt man nun die Ungleichung $|g(z)| < |f(z)| \, \forall z \in \partial U_r(0)$. Es gilt dann für alle $z \in \partial U_r(0)$:

$$|g(z)| = |P(z) - f(z)| = \left| -a_m z^m + \sum_{k=0, k\neq m}^{n} a_k z^k \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n} |a_k||z|^k < 2|a_m|r^m = |f(z)|$$

Mit dem Satz von Rouché folgt nun, dass $f(z)$ und $f(z) + g(z) = P(z)$ die selbe Anzahl an Nullstellen mit Vielfachheiten gezählt in $U_r(0)$ und keine Nullstellen auf $\partial U_r(0)$ haben. $f(z)$ hat offensichtlich m Nullstellen mit Vielfachheiten gezählt in $U_r(0)$, also auch $P(z)$. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra hat $P(z)$ in $\mathbb{C}$ $\text{grad}P = n$ Nullstellen mit Vielfachheit gezählt. Insgesamt folgt also die Aussage, dass $P(z)$ in $\mathbb{C}\backslash\overline{U_r(0)}$ genau $m - n$ Nullstellen mit Vielfachheiten gezählt hat.
Ein Gegenbeispiel liefert $P(z) = z^2 + z$. Wähle $m = 1$ und $r = 1$, dann gilt $1^2 + 1 = 2 = 2 \cdot |1| \cdot 1$, aber $P(z)$ hat Nullstelle -1 auf dem Rand von $U_1(0)$, ein Widerspruch.

Zu b):

Definiere $f(z) := z^5 + 12z^2 + i$ und betrachte die folgenden Fälle:

<u>$m = 2$ und $r = 2$:</u> Es gilt dann die Ungleichung $2^5 + 12 \cdot 2^2 + |i| = 81 < 96 = 2 \cdot 12 \cdot 2^2$. Mit a) hat $f(z)$ in $U_2(0)$ genau 2 Nullstellen mit Vielfachheiten gezählt.

<u>$m = 2$ und $r = 1$:</u> Es gilt dann die Ungleichung $1^5 + 12 \cdot 1^2 + |i| = 14 < 24 = 2 \cdot 12 \cdot 1^2$. Wieder mit a) gilt dann, dass $f(z)$ in $U_1(0)$ genau 2 Nullstellen mit Vielfachheiten gezählt hat.

Insgesamt hat $f(z)$ in $U_2(0) \backslash U_1(0)$ keine Nullstellen. Nach dem allgemeinen Cauchyschen Integralsatz oder dem allgemeineren Residuensatz folgt dann die Gleichheit der gegebenen Integrale.