H11T1A2

Es sei $\Omega \neq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, es seien $a, b \in \Omega$ mit $a \neq b$, und es seien f und g biholomorphe Abbildungen von Ω auf sich selbst mit $f(a) = g(a)$, $f(b) = g(b)$. Zeige $f = g$.

Lösung:

Da $\Omega \neq \mathbb{C}$ und einfach zusammenhängend ist, ist Ω nach dem Riemannschen Abbildungssatz biholomoprh zur offenen Einheitskreisscheibe.
Betrachte $\Omega = \mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1\}$. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{Aut}(\mathbb{E}) &= \{f : \mathbb{E} \to \mathbb{E} \mid f \text{ biholomorph}\} \\ &= \{g_{z_0,\lambda} : \mathbb{E} \to \mathbb{E}\ ,\ z \mapsto e^{i\lambda} \tfrac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}\ :\ \lambda \in [0, 2\pi[\} \end{aligned}$$

$$\mathrm{Aut}_0(\mathbb{E}) = \{f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{E})\ :\ f(0) = 0\} = \{g_\lambda : \mathbb{E} \to \mathbb{E}\ ,\ z \mapsto e^{i\lambda} z\ :\ \lambda \in [0, 2\pi[\}$$

Sind a, $b \in \mathbb{E}$, $a \neq b$, $f\ g \in \mathrm{Aut}(\mathbb{E})$ mit $f(a) = g(a)$, $f(b) = g(b)$
$\Rightarrow\ h := f^{-1} \circ g\ :\ \mathbb{E} \to \mathbb{E}$, dann ist $h(a) = f^{-1}(g(a)) = f^{-1}(f(a)) = a$ und
$h(b) = f^{-1}(g(b)) = f^{-1}(f(b)) = b \quad \Rightarrow\ h \in \mathrm{Aut}(\mathbb{E})$

Es gilt $h = \mathrm{id}_{\mathbb{E}}$, denn zu $h \in \mathrm{Aut}(\mathbb{E})$, a, $b \in \mathbb{E}$, $a \neq b$ mit $h(a) = a$ und $h(b) = b$ betrachte:

$$g_a : \mathbb{E} \to \mathbb{E}, \quad z \mapsto \frac{z - a}{1 - \bar{a} z} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{E})$$

$$g_a(a) = 0, \quad g_a^{-1}(0) = a, \quad g_a(b) \neq g_a(a) = 0$$

Sei $k := g_a \circ h \circ g_a^{-1} : \mathbb{E} \to \mathbb{E} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{E})$ mit $k(0) = g_a(h_a) = g_a(a) = 0$
$\Rightarrow \exists \lambda \in [0, 2\pi[$ mit $k(z) = e^{i\lambda} z\ \forall z \in \mathbb{E}$ und damit

$$k(g_a(b)) = (g_a \circ h \circ g_a^{-1})(g_a(b)) = g_a(h(b)) = g_a(b)$$

Daraus folgt $\lambda = 0$, d.h. $k = \mathrm{id}_{\mathbb{E}} = g_a \circ h \circ g_a^{-1} \quad h = \mathrm{id}_{\mathbb{E}}$.

Ist $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, dann gibt es nach dem Riemannschen Abbildungssatz ein biholomorphes $F : \Omega \to \mathbb{E}$. Sind $f : \Omega \to \Omega$, $g : \Omega \to \Omega$ biholomorph mit $f(a) = g(a)$, $f(b) = g(b)$
$\Rightarrow\ F \circ f \circ F^{-1} : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ und $F \circ g \circ F^{-1} : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ sind biholomorph und es gilt:

$$(F \circ f \circ F^{-1})(f(a)) = F(f(a)) = F(g(a)) = F \circ g \circ F^{-1}(g(a))$$

$$(F \circ f \circ F^{-1})(f(b)) = F(f(b)) = F(g(b)) = F \circ g \circ F^{-1}(g(b))$$

$\Rightarrow$ im Fall $\Omega = \mathbb{E}$ gilt: $F \circ f \circ F^{-1} = F \circ g \circ F^{-1} \quad f = g$