

**Herbst 10 Themennummer 3 Aufgabe 5 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

Es sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $x_0 = x_0(t)$ eine T -periodische Lösung der minimalen Periode $T > 0$ von

$$\dot{x} = f(x).$$

Es sei $U(t)$ Fundamentalsystem der sogenannten Variationsgleichung

$$\dot{y} = Df(x_0(t))y,$$

d. h. die matrixwertige Lösung mit $U(0) = I$ (= Identität). Dabei ist $Df(x_0(t))$ die Ableitung (die Jacobi-Matrix) von f in $x_0(t)$.
Zeigen Sie, dass $U(T)$ den Eigenwert 1 hat.

Lösungsvorschlag:

Da x_0 eine periodische Lösung ist, ist auch $\dot{x}_0$ periodisch. Das sieht man, wenn man die Gleichung

$$x_0(t+T) = x_0(t)$$

für beliebiges $t \in \mathbb{R}$ nach t differenziert. Jetzt gilt für $t \in \mathbb{R}$, wenn man die Differentialgleichung für x_0 einsetzt ($t \in \mathbb{R}$):

$$\frac{d}{dt}\dot{x}_0(t) = \frac{d}{dt}(f(x_0(t))) = Df(x_0(t))\dot{x}_0(t)$$

Dabei wurde im letzten Schritt die Kettenregel angewandt. $\dot{x}_0$ erfüllt also die Differentialgleichung $\dot{y} = Df(x_0(t))y$ aus der Aufgabenstellung. Wir erkennen, dass diese Differentialgleichung als lineare Differentialgleichung mit stetigen Koeffizienten zu jedem Anfangswert eine eindeutige Lösung besitzt¹

Nach Konstruktion von U ist dann $\dot{x}_0(t) = U(t)\dot{x}_0(0)$ für alle $t \in \mathbb{R}$: Fundamentalsystem bedeutet, dass $\mathbb{R} \ni t \mapsto U(t)v$ für jedes $v \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung ist. Da die Lösung zum Anfangswert $\dot{x}_0(0)$ eindeutig ist, muss aus $U(0)\dot{x}_0(0) = \dot{x}_0(0)$ bereits $\dot{x}_0(t) = U(t)\dot{x}_0(0)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ folgen.

Wegen der Periodizität von $\dot{x}_0$ ist

$$U(T)\dot{x}_0(0) = \dot{x}_0(T) = \dot{x}_0(0).$$

Also ist $\dot{x}_0(0)$ ein Eigenvektor von $U(T)$ zum Eigenwert 1.

JR

¹Das ist ein Standardresultat. Man kann es mit Picard-Lindelöf herleiten, indem man erkennt, dass $Df(x_0(t)) = \partial_y(Df(x_0(t))y)$ ($y \in \mathbb{R}$) eine stetige Funktion in t ist.