Herbst 10 Themennummer 3 Aufgabe 4 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

> Bestimmen Sie alle Lösungen von
>
> $$\begin{aligned}\dot{x} &= 8x + 10y \\ \dot{y} &= -5x - 6y\end{aligned}$$
>
> und skizzieren Sie das Phasenportrait.

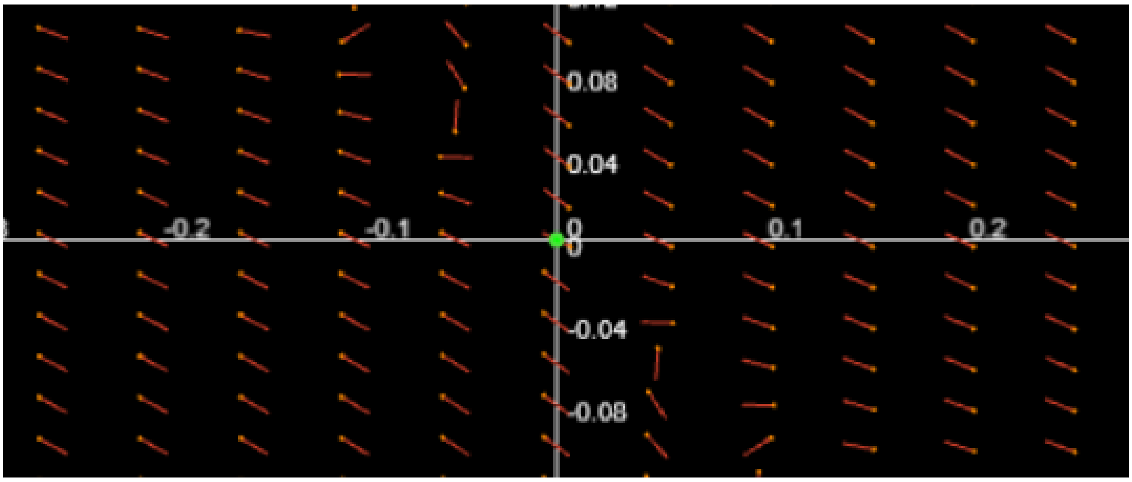
Lösungsvorschlag:

Das Gleichungssystem ist linear und besitzt die Strukturmatrix $A := \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ -5 & -6 \end{pmatrix}$ mit charakteristischer Gleichung $\lambda^2 - 2\lambda + 2$ und Eigenwerten $1 \pm i$. Geeignete Linearkombinationen der Funktionen $f(t) = e^t \sin t, g(t) = e^t \cos t$ für x, y führen daher auf ein Fundamentalsystem.
Wir machen den Ansatz $(x, y) = (af + bg, cf + dg)$ und erhalten wegen $f' = f + g$ und $g' = g - f$ also $(x', y') = ((a + b)g + (a - b)f, (c + d)g + (c - d)g)$ sowie $(8x + 10y, -5x - 6y) = ((8a + 10c)f + (8b + 10d)g, (-5a - 6c)f + (-5b - 6d)g)$ durch Koeffizientenvergleich die Bedingung

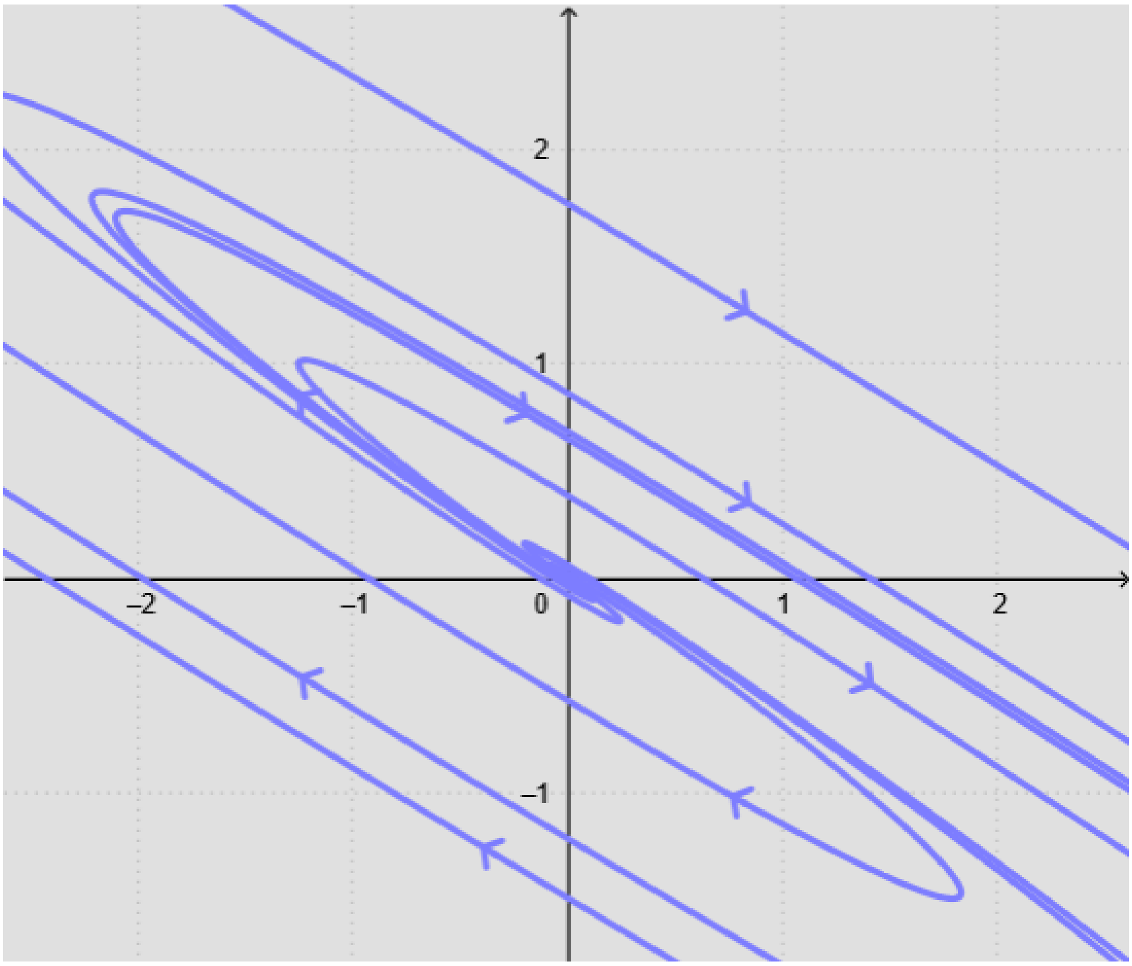
$$\begin{pmatrix} 7 & 1 & 10 & 0 \\ -1 & 7 & 0 & 10 \\ 5 & 0 & 7 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mit dem Gauss-Verfahren lösen wir dieses System und erhalten $a = -\frac{7}{5}c + \frac{1}{5}d$ und $b = -\frac{1}{5}c - \frac{7}{5}d$.
Die allgemeine Lösung hat für $c, d \in \mathbb{R}$ daher die Form

$$(x, y) = e^t \left(\frac{1}{5}((d - 7c)\sin t + (-c - 7d)\cos t, c \sin t + d \cos t \right).$$



$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$


2
1
–1
–2
–1
0
1
2