Herbst 10 Themennummer 3 Aufgabe 3 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Sei
$$f(x,t) := \frac{t^2}{(e^x - x)^2}.$$

a) Zeigen Sie, dass $e^x \neq x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist, also dass f auf ganz $\mathbb{R}^2$ definiert ist.

b) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem
$$\dot{x}(t) = f(x,t) \qquad x(0) = 0,$$
eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung hat.

Lösungsvorschlag:

a) Die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = e^x - x$ ist differenzierbar mit Ableitung $g'(x) = e^x - 1$. Diese verschwindet genau für $x = 0$ und ist positiv/negativ für positive/negative x. Bei $x = 0$ handelt es sich daher um die globale Minimalstelle von g. Wegen $g(0) = 1$ folgt $e^x \geq x + 1 > x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und insbesondere $e^x \neq x$.

b) f ist stetig differenzierbar, also stetig und lokal lipschitzstetig bezüglich x. Nach a) gilt $|f(x,t)| \leq t^2$ für alle $t, x \in \mathbb{R}$ und f ist auf $\mathbb{R}^2$ definiert. Das Wachstum bleibt linear beschränkt (bezüglich x) und es existiert daher genau eine Maximallösung des Anfangswertproblems und diese ist auf $\mathbb{R}$ definiert.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$