Herbst 10 Themennummer 3 Aufgabe 2 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Sei
$$A := \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}.$$
Zeigen Sie: Jede auf ganz $\mathbb{C}\backslash A$ definierte, beschränkte, holomorphe Funktion ist konstant.

Lösungsvorschlag:

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\frac{1}{n}$ eine isolierte Singularität von f (betrachte $B_r(\frac{1}{n})$ für $r = \frac{1}{n(n-1)}$) und auf einer Umgebung (gleiche Kreisscheibe wie gerade) beschränkt. Daher ist jede dieser Singularitäten (zugleich) hebbar und es existiert eine holomorphe, beschränkte Fortsetzung g auf $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.
Nun ist 0 eine isolierte Singularität von g und g auf einer Umgebung von 0 beschränkt, also ist 0 hebbar. Es gibt daher eine ganze Fortsetzung h von g, die wiederum beschränkt ist und f fortsetzt.
h ist eine ganze, beschränkte Funktion, also konstant nach dem Satz von Liouville. Als Einschränkung $f = h|_A$ ist also auch f konstant.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$