**Herbst 10 Themennummer 3 Aufgabe 1 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

Sei $f$ eine in einer Umgebung von $\overline{D_2} := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2\}$ definierte holomorphe Funktion mit

$$|f(z)| \leq 1 \quad \forall z \in \overline{D_2}.$$

Zeigen Sie: Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leq 1$ gilt $|f''(z)| \leq 4$.
Hinweis: Cauchy-Integralformel

**Lösungsvorschlag:**

Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leq 1$ verläuft die Spur von $\gamma_z : [0, 2\pi] \to \mathbb{C},\ t \mapsto z + e^{it}$ wegen $|\gamma_z(t)| \leq |z| + |e^{it}| \leq 1 + 1 = 2$ vollständig in $\overline{D_2}$ und daher in der Definitionsmenge von $f$.
Nach der Cauchy-Integralformel, bzw. Taylor-Formel ist $f''(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma_z} \frac{f(w)}{(w-z)^3} \mathrm{d}w$ und nach der Standardabschätzung folgt $|f''(z)| \leq \frac{|\gamma_z|}{\pi} \cdot \max\limits_{t \in [0,2\pi]} \frac{|f(z+e^{it})|}{|e^{3it}|} = 2 \cdot 1 = 2 \leq 4$.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$