Herbst 10 Themennummer 2 Aufgabe 5 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Man berechne die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$x'' + 2x' + 4x = \sin t.$$

(Hinweis: Eine partikuläre Lösung ergibt sich aus dem Ansatz $x(t) = a\cos t + b\sin t$.)

Lösungsvorschlag:

Die homogene Lösung ergibt sich aus den Nullstellen des Polynoms x^2+2x+4, also aus $\lambda_\pm = -1 \pm \sqrt{3}i$, durch Linearkombination der Funktionen $e^{t\lambda_\pm}$.
Für eine partikuläre Lösung, betrachten wir den Ansatz aus dem Hinweis und erhalten $\sin t = x''+2x'+4x = (3a+2b)\cos t+(3b-2a)\sin t$, also $3a+2b = 0, 3b-2a = 1$.
Die (eindeutige) Lösung diesen Gleichungssystems ist $b = \frac{2}{13}, a = \frac{3}{13}$.
Nach dem Superpositionsprinzip ist die allgemeine Lösung von der Form $x(t) + ae^{\lambda_+ t} + be^{\lambda_i t}$ für $a, b \in \mathbb{R}$. Die allgemeine reelle Lösung lautet

$$x_{a,b}(t) = \frac{3}{13}\cos t + \frac{2}{13}\sin t + e^{-t}(a\cos(\sqrt{3}t) + b\sin(\sqrt{3}t));\ \ a, b \in \mathbb{R}.$$

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$