H10T2A4

Bestimme für das Differentialgleichungssystem

$$x_1' = x_2$$

$$x_2' = x_1$$

ein nicht-konstantes erstes Integral, d.h. eine nicht-konstante Funktion $E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die längs der Lösungskurven konstant ist.

Lösung:

$$\left\langle \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto -\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$$

erfüllt $(\nabla E)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ also ist E eine nicht-konstante Erhaltungsgröße.

Ist $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} : I \to \mathbb{R}^2$ eine Lösung von $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$, dann gilt für

$$(E \circ \lambda)'(t) = \langle (\nabla E)(\lambda(t)), \lambda'(t) \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -\lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_2(t) \\ \lambda_1(t) \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$\Rightarrow E \circ \lambda$ konstant auf I.