Herbst 10 Themennummer 2 Aufgabe 3 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Man bestimme die Laurent-Entwicklung von $f(z) := \frac{z}{(z-1)(z-2)}$ in der Kreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ und in den Kreisringen $\{z \in \mathbb{C} :\ 1 < |z| < 2\}$ und $\{z \in \mathbb{C} :\ 2 < |z|\}$. (Hinweis: Man verwende Partialbruchzerlegung.)

Lösungsvorschlag:

Mittels Partialbruchzerlegung (oder durch Raten) erhält man die Darstellung $f(z) = \frac{2}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1-\frac{z}{2}}$. Für $|z| < 1$ ist auch $|\frac{z}{2}| < 1$ und beide Reihen konvergieren als geometrische Reihen. In der Kreisscheibe gilt also

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) z^n.$$

Im ersten, dem beschränkten, Kreisring konvergiert der Subtrahend nach wie vor. Den Minuenden formen wir zu $\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}$ um, was wegen $z \neq 0$ und $|\frac{1}{z}| < 1$ dann wieder als geometrische Konvergiert. Das liefert

$$f(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}.$$

Auf dem zweiten Kreisring formen wir den Minuenden genauso um und schreiben analog den Subtrahenden als $\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{2}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}}$ und folgern

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 1}{z^n}$$

$\mathcal{J.F.B.}$