Herbst 10 Themennummer 2 Aufgabe 2 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Sei f eine in der offenen Einheitskreisscheibe $\mathbb{E} \subset \mathbb{C}$ holomorphe Funktion, für die $\lvert f(0)\rvert < 1$ und $\lvert f(z)\rvert \leq 1$ für alle $z \in \mathbb{E}$ gilt. Man zeige, dass dann sogar $\lvert f(z)\rvert < 1$ für alle $z \in \mathbb{E}$ gelten muss.

Lösungsvorschlag:

Angenommen dem wäre nicht so und es gäbe ein $z_0 \in \mathbb{E}$ mit $\lvert f(z_0)\rvert \not< 1$, dann folgt aus $\lvert f(z)\rvert \leq 1$ auf $\mathbb{E}$ schon $\lvert f(z_0)\rvert = 1$.
Wir finden zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $\{z \in \mathbb{C} : \ \lvert z\rvert < \delta\} \subset \mathbb{E}$ und $\lvert z - z_0\rvert < \delta \implies \lvert f(z) - f(z_0)\rvert < \frac{1}{2}$. Daraus folgt dann $\lvert f(z)\rvert \geq \lvert\lvert f(z) - f(z_0)\rvert - \lvert f(z_0)\rvert\rvert = 1 - \lvert f(z) - f(z_0)\rvert > \frac{1}{2}$, also insbesondere $f(z) \neq 0$.
Auf dem Gebiet $\{z \in \mathbb{C} : \ \lvert z - z_0\rvert < \delta\}$ ist f holomorph. Es handelt sich bei z_0 zudem um ein globales Maximum von $\lvert f\rvert$ auf dieser Menge. Daher ist f nach dem Maximumsprinzip konstant auf $\{z \in \mathbb{C} : \ \lvert z - z_0\rvert < \delta\}$.
Die Menge $\{z \in \mathbb{C} : \ \lvert z - z_0\rvert < \delta\}$ häuft sich in $z_0 \in \mathbb{E}$. Nach dem Identitätssatz ist f konstant auf $\mathbb{E}$. Insbesondere folgt $f(z_0) = f(0)$ und $1 = \lvert f(z_0)\rvert = \lvert f(0)\rvert < 1$, ein Widerspruch.
Demnach war die Annahme falsch und es folgt $\lvert f(z)\rvert < 1$ auf $\mathbb{E}$.

$\mathcal{J.F.B.}$