Herbst 10 Themennummer 2 Aufgabe 1 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Gegeben sei die Möbius-Transformation $h(z) := \frac{1}{z-1}$. Sei $\mathbb{E} \subset \mathbb{C}$ die offene Einheitskreisscheibe und $K \subset \mathbb{C}$ die abgeschlossene Kreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} : \ |z - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2}\}$. Mit ∂E und ∂K werde der Rand von $\mathbb{E}$ bzw. K bezeichnet.

a) Man zeige, dass $h(\partial\mathbb{E})$ und $h(\partial K)$ parallele Geraden sind.

b) Man gebe die Geraden $h(\partial E)$ und $h(\partial K)$ jeweils explizit in der Form $ax + by = c$ an, wobei x und y Real- und Imaginärteil von $z \in \mathbb{C}$ sind.

c) Man bestimme $h(\mathbb{E}\backslash K)$ explizit durch Ungleichungen der Form $ax + by \gtrless c$ und skizziere die Mengen $\mathbb{E}\backslash K$ und $h(\mathbb{E}\backslash K)$.

Lösungsvorschlag:

a) Möbius-Transformationen sind kreistreu und bei $\partial E, \partial K$ handelt es sich um Kreislinien. Ihre Bilder sind also entweder Kreislinien oder Geraden in $\mathbb{C} \cup \{\infty\} =: \overline{\mathbb{C}}$. Da beide Kreislinien die 1 enthalten. die von h auf ∞ abgebildet wird, muss es sich bei beiden Bildmengen um Geraden handeln. Diese sind eindeutig durch zwei verschiedene Elemente, die von ∞ verschieden sind, festgelegt, weshalb wir als nächstes je zwei solche Punkte suchen.
Es gilt $-1, i \in \partial\mathbb{E}$ sowie $0, \frac{1+i}{2} \in \partial K$. Diese Punkte werden auf

$$h(-1) = -\frac{1}{2}, h(i) = \frac{-1-i}{2}, h(0) = -1, h\left(\frac{1+i}{2}\right) = -i - 1$$

abgebildet.
Da $h(i) - h(1) = -\frac{i}{2}$ und $h(\frac{1+i}{2}) - h(0) = i$ linear abhängig sind, sind die Geraden parallel.

b) Aus a) folgt $h(\partial\mathbb{E}) = \{-\frac{1}{2} + ti : t \in \mathbb{R}\} \cup \{\infty\}$ sowie $h(\partial K) = \{-1 + ti : t \in \mathbb{R}\} \cup \{\infty\}$. Für $\mathbb{E}$ erhalten wir $a = -2, b = 0, c = 1$ und für K erhalten wir $a = -1, b = 0, c = 1$.

c) Wir betrachten die beiden Geraden aus a) und b), also $g_1 := h(\partial\mathbb{E}), g_2 := h(\partial K)$. Außerdem betrachten wir noch die drei paarweise disjunkten, nicht-leeren Gebiete $G_1 := \mathbb{E}\backslash K, G_2 := \{z \in \mathbb{C} : \ |z - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}\}, G_3 := \{z \in \mathbb{C} : \ |z| > 1\}$.
Als Möbiustransformation ist h holomorph, injektiv und auf keinem der Gebiete G_1, G_2, G_3 konstant. Nach dem Satz von der Gebietstreue und Nutzung der Injektivität von h, sind $h(G_1), h(G_2), h(G_3)$ ebenfalls drei paarweise disjunkte Gebiete. Diese dürfen, wieder wegen der Injektivität von h, die Geraden g_1, g_2 nicht schneiden.
Wegen $-\frac{1}{2} \in \mathbb{E}\backslash K$ und $h(-\frac{1}{2}) = -\frac{2}{3}$ handelt es sich bei $h(G_1)$ um eine Teilmenge von $S := \{z \in \mathbb{C} : -1 < \text{Re}\, z < -\frac{1}{2}\}$. Wegen der Surjektivität von h und der Disjunktheit von $h(S)$ zu $h(G_2), h(G_3), g_1, g_2$ gilt bereits Gleichheit, also $S = h(G_1) = h(\mathbb{E}\backslash K)$. Dies ist der Schnitt der Mengen $x > -1$ und $x < -\frac{1}{2}$.
Die hellgrüne Sichel stellt die Menge $\mathbb{E}\backslash K$ dar, der türkise Streifen (der sich unendlich lang nach oben und unten erstreckt) stellt das Bild $h(\mathbb{E}\backslash K)$ dar.

J.F.B.

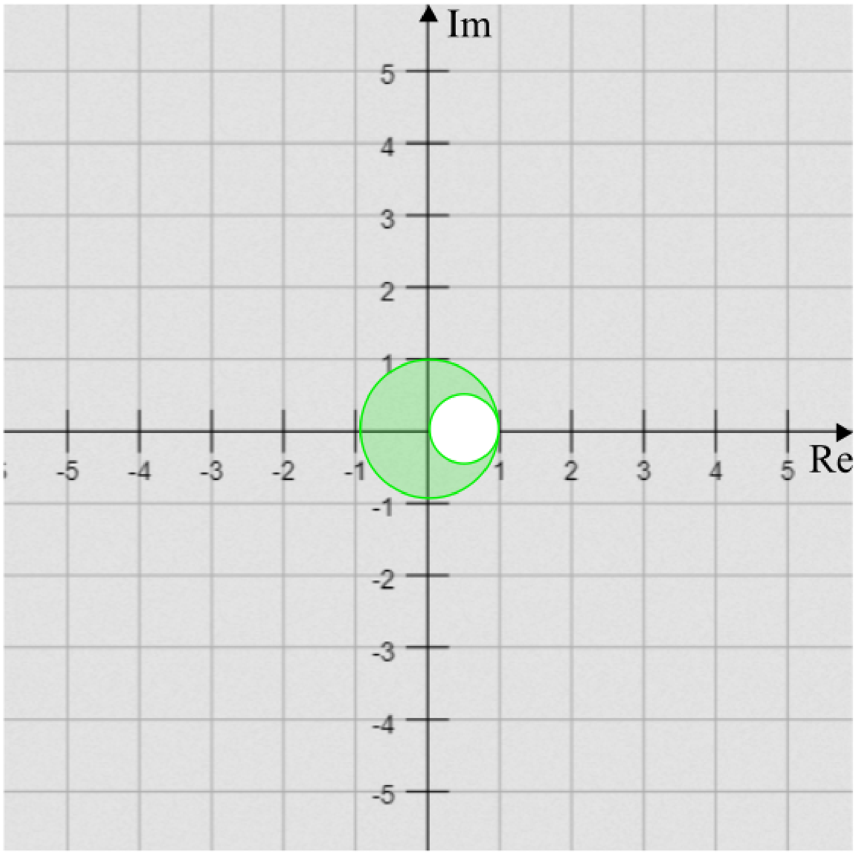

Abbildung 1: Die Menge $\mathbb{E}\backslash K$ ...

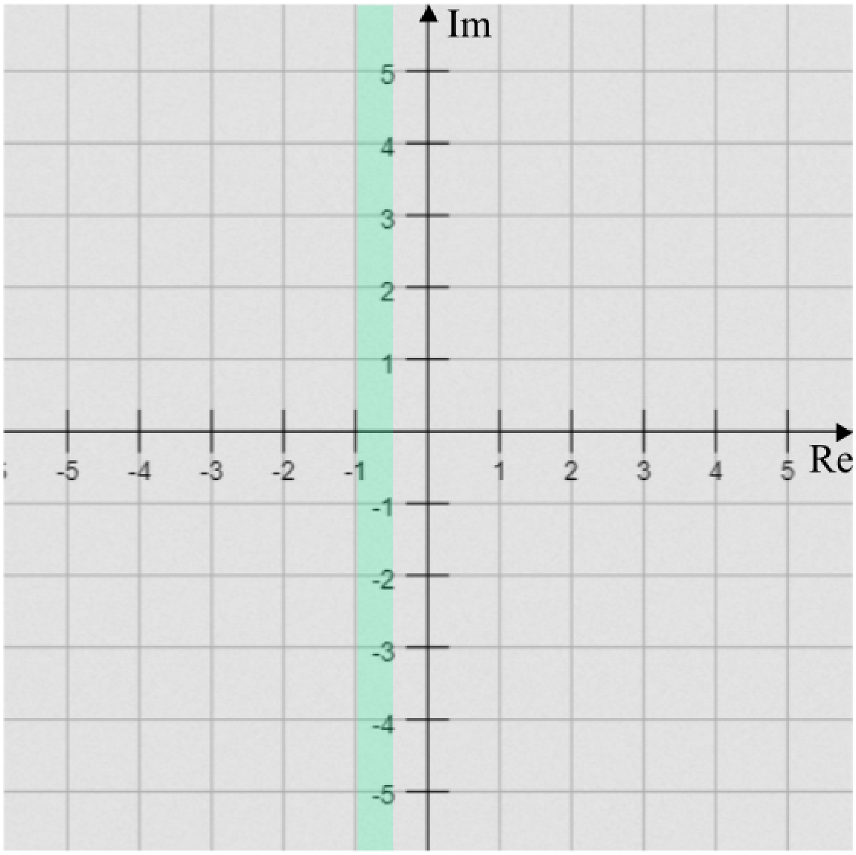

Abbildung 2: ... und deren Bild unter h.