Herbst 10 Themennummer 1 Aufgabe 5 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

a) Formulieren Sie den Identitätssatz für holomorphe Funktionen.

b) Für $r > \frac{1}{2}$ sei $D_r := \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < r\}$. Für welche r gibt es eine holomorphe Funktion $f : D_r \to \mathbb{C}$ mit $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n-1}$ für $n = 2{,}3{,}4, ...$?

Lösungsvorschlag:

a) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, seien $f, g : G \to \mathbb{C}$ und die Menge $\{z \in G : f(z) = g(z)\}$ besitze einen Häufungspunkt in G, dann gilt $f(z) = g(z)$ für alle $z \in G$.

b) Für alle $\frac{1}{2} < r \leq 1$. Die Wahl $r > \frac{1}{2}$ garantiert $\frac{1}{n} \in D_r$ für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ und $0 \in D_r$.
Für $\frac{1}{2} < r \leq 1$ ist $g : D_r \to \mathbb{C}, \ z \mapsto \frac{z}{1-z}$ holomorph und erfüllt die Voraussetzung.
Sei $r > 1$, dann enthält D_r auch D_1. Erfüllt f die Voraussetzung, so gilt $f(\frac{1}{n}) = g(\frac{1}{n})$ für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Die Menge $\{z \in D_1 : f(z) = g(z)\}$ häuft sich demnach in $0 \in D_1$, was ein Gebiet ist. Also folgt $f(z) = g(z)$ für $z \in D_1$.
Nun ist f eine holomorphe Fortsetzung von g auf D_r und es gilt $1 \in D_r$. Also müsste 1 eine hebbare Singularität von g sein. Bei 1 handelt es sich aber um einen Pol erster Ordnung von g, weil g eine rationale Funktion ist und für $z = 1$ der Nenner eine einfache Nullstelle besitzt, während der Zähler nicht verschwindet. Dies liefert einen Widerspruch und eine solche Funktion f existiert nicht.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$