Herbst 10 Themennummer 1 Aufgabe 4 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Zeigen Sie mithilfe des Residuensatzes, dass

$$I := \int_0^{2\pi} \frac{dt}{5 + 3\cos t} = \frac{\pi}{2}$$

ist.

Lösungsvorschlag:

Der Integrand ist stetig, weil der Nenner nie verschwindet, also existiert I.
Wir betrachten die holomorphe Funktion $f : \mathbb{C}\backslash\{-3, -\frac{1}{3}\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{-2i}{3z^2+10z+3}$ und die glatte, geschlossene Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C},\ t \mapsto e^{it}$. Diese verläuft im Definitionsbereich von f und umläuft nur die Singularität $-\frac{1}{3}$ und das exakt einmal positiv. Weil f eine rationale Funktion ist und $-\frac{1}{3}$ eine einfache Nullstelle des Nenners ist, für die der Zähler nicht verschwindet, handelt es sich um einen Pol erster Ordnung. Das Residuum erhalten wir daher als $\frac{-2i}{6\cdot(-\frac{1}{3})+10} = -\frac{i}{4}$.
Nach dem Residuensatz, der anwendbar ist, weil $\mathbb{C}$ offen und konvex ist, gilt $\int_\gamma f\mathrm{d}z = -2\pi i\cdot\frac{i}{4} = \frac{\pi}{2}$. Andererseits ist $\int_\gamma f\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \frac{-2i}{3e^{2it}+10e^{it}+3}\cdot ie^{it}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{2}{10+3(e^{it}+e^{-it})}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{5+3\cos t}$, also ist $I = \frac{\pi}{2}$.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$