Herbst 10 Themennummer 1 Aufgabe 3 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Konstruieren Sie eine gebrochen-rationale Abbildung (Möbius-Transformation) f, die die Kreisscheibe $K := \{z \in \mathbb{C} : \ |z+1| < 2\}$ auf die obere Halbebene $H := \{w \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Im}(w) > 0\}$ abbildet. Ist eine solche Abbildung eindeutig bestimmt?

Lösungsvorschlag:

Für jedes $w \in H \neq \emptyset$ ist $f \equiv w$ eine solche Abbildung, insbesondere also nicht eindeutig bestimmt, da H unendlich viele Elemente enthält.
Fordert man dagegen zusätzlich Bijektivität, benötigt man eine andere Abbildung.
Die Cayley-Transformation $C : \mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1\} \to H, z \mapsto \frac{z+1}{iz-i}$ ist bekanntermaßen eine biholomorphe Möbiustransformation.
Die Funktion $g : K \to \mathbb{D}, g(z) := \frac{z+1}{2}$ ist ebenso eine biholomorphe Möbiustransformation.
Damit ist deren Verkettung $f := C \circ g : K \to H$ eine biholomorphe Möbiustransformation.
Diese ist nicht die einzige solche Funktion. Die Funktionen $D_r : \mathbb{D} \to \mathbb{D}, z \mapsto rz$ sind für $r \in \mathbb{C}, |r| = 1$ ebenso biholomorph und demnach sind die Funktionen $f_r := C \circ D_r \circ g : K \to H$ wieder biholomorph, insbesondere f_{-1}, da $|-1| = 1$ ist.
Wegen $f_1(0) = \frac{3}{-i} = 3i \neq \frac{i}{3} = \frac{1}{-3i} = f_{-1}(0)$, sind diese voneinander verschieden.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$