Herbst 10 Themennummer 1 Aufgabe 2 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

a) Beschreiben Sie ein Lösungsverfahren für die Bernoulli-Differentialgleichung

$$y' = p(x)y + q(x)y^\tau,$$

wobei p und q stetige Funktionen und $\tau \in \mathbb{R}\backslash\{0;1\}$ seien.
Hinweis: Verwenden Sie eine Transformation der Form $z := y^\alpha$ mit geeignetem α.

b) Berechnen Sie mit dem in (a) beschriebenen Verfahren eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = x\sqrt{y} - y, \qquad y(0) = 4.$$

Lösungsvorschlag:

a) Wir setzen wie empfohlen $z = y^\alpha$ und erhalten

$$z' = \alpha y^{\alpha-1}y' = \alpha p(x)z + \alpha q(x)y^{\alpha-1+\tau}.$$

Wir wählen α geschickt, sodass die Inhomogenität $y^{\alpha-1+\tau}$ von einer besonders einfachen Form ist. Für $\alpha := 1-\tau$ erhalten wir die lineare Differentialgleichung $z' = (1-\tau)p(x)z + (1-\tau)q(x)$, die sich nach bekannten Verfahren lösen lässt. Durch die Rücktransformation $y := z^{\frac{1}{\alpha}}$ erhalten wir dann eine Lösung des Bernoulli-Problems.
Bemerkung: Für $\tau < 0$ ist $y < 0$ unmöglich, weil dann auch die Differentialgleichung nicht definiert wäre. In diesem Fall sind die beschriebenen Transformationen durchführbar. Weiterhin setzen wir $0^0 := 1$. Für $\tau > 1$ wäre aber $\alpha < 0$ und wir müssen uns auf positive Lösungen $y > 0$ einschränken, insbesondere dann wenn $\tau \notin \mathbb{N}_0$. In diesem Fall ist aber $y \equiv 0$ eine Lösung und die Strukturfunktion ist lokal lipschitzstetig. Für positive Anfangsbedingungen erhalten wir daher kein Problem. Wegen $1 \neq \tau \neq 0$ ist $0 \neq \alpha \neq 1$, die Transformationen sind also möglich und nichttrivial, sofern $y > 0$.

b) $y \equiv 0$ erfüllt die Anfangsbedingung nicht und die Wurzel ist für negativwertige Funktionen nicht definiert. Jede Lösung muss also strikt positiv sein und wir können wie in a) transformieren.
Hier ist $q(x) = x, p(x) = -1, \tau = \frac{1}{2}$ und $\alpha = \frac{1}{2}$. Wir lösen also

$$z' = -\frac{1}{2}z + \frac{x}{2}, z(0) = y(0)^{\frac{1}{2}} = 2.$$

Die homogene Lösung ist $h(x) = 2e^{-\frac{x}{2}}$ und der Ansatz $z(x) = h(x)c(x)$ liefert $c'(x) = \frac{x}{4}e^{\frac{x}{2}}, c(0) = 1$, also $c(x) = \frac{1}{2}(x-2)e^{\frac{x}{2}} + 2$. Das führt auf $z(x) = x - 2 + 4e^{-\frac{x}{2}}$ und $y(x) = (x - 2 + 4e^{-\frac{x}{2}})^2$.

$\mathcal{J.F.B.}$