Herbst 10 Themennummer 1 Aufgabe 1 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Finden Sie heraus, ob die folgenden Aussagen über $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ wahr oder falsch sind. Bei wahren Aussagen geben Sie eine kurze Begründung, bei falschen Aussagen ein Gegenbeispiel an:

a) Ist f differenzierbar, so ist f' stetig.

b) Ist f differenzierbar, so ist f' beschränkt.

c) Ist f stetig, so nimmt f auf jedem abgeschlossenen Teilintervall $[a,b] \subset [0,1]$ alle Werte zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

d) Nimmt f auf jedem abgeschlossenen Teilintervall $[a,b] \subset [0,1]$ alle Werte zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an, so ist f stetig.

e) Ist f stetig, so besitzt f eine Stammfunktion.

f) Ist f stetig, so ist f integrierbar.

Lösungsvorschlag:

a), b) Beide Aussagen sind falsch. Wir geben ein Gegenbeispiel für b) an, dieses widerlegt auch a) weil stetige Funktionen auf [0,1] beschränkt sind.
Wir betrachten die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right), & \text{falls } x \in (0,1], \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

In 0 ist diese wegen

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} x \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$$

nach dem Einschnürungssatz differenzierbar. Für $x > 0$ ist diese differenzierbar als Verknüpfung differenzierbarer Funktionen mit Ableitung $f'(x) = 2x\cos(\frac{1}{x^2}) - \frac{1}{2x}\sin(\frac{1}{x^2})$. Also ist f differenzierbar.
Für die Folge $x_n := \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}+2n\pi}} > 0$ gilt $f'(x_n) = -\frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}+2n\pi}}{2} \to -\infty$ für $n \to \infty$. Also ist f' unbeschränkt und unstetig auf [0,1].

c) Diese Aussage ist wahr nach dem Zwischenwertsatz, weil f auch auf jedem abgeschlossenen Teilintervall [a,b] stetig ist.

d) Diese Aussage ist falsch. Wir betrachten die Funktion

$$g(x) := \begin{cases} \cos(\frac{1}{x}), & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Diese ist unstetig, weil $\lim\limits_{n\to\infty} g(\frac{1}{2n\pi}) = 1 \neq 0 = g(0)$ ist, obwohl $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2n\pi} = 0$ gilt.

Sei $[a, b] \subset [0,1]$, für $a > 0$ ist nichts zu zeigen, weil g auf solchen Intervallen stetig als Verknüpfung stetiger Funktionen ist und c) gilt. Sei also $b > 0$, dann zeigen wir, dass g auf [0,b] jeden Wert zwischen -1 und 1 annimmt. Wegen $f(b) = \cos(\frac{1}{b}) \in [-1,1]$ und $0 \in [-1,1]$ folgt dann auch, dass g alle Werte zwischen $f(0)$ und $f(b)$ annimmt. Da $\cos : [\pi, 2\pi] \to [-1,1]$ stetig ist und $\cos(\pi) = -1, \cos(2\pi) = 1$ gilt, ist die Funktion auch surjektiv nach c). Insbesondere ist daher $\cos : [\pi,3\pi] \to [-1,1]$ surjektiv. Weiterhin ist die Kosinusfunktion 2π-periodisch. Sei also $y \in [-1,1]$, dann gibt es ein $x \in [\pi,3\pi]$ mit $\cos(x) = y$. Für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$ gilt $0 \leq \frac{1}{x+2\pi n} \leq b$ und $g(\frac{1}{x+2\pi n}) = \cos(x + 2\pi n) = \cos(x) = y$ und daher nimmt g jeden Wert in $[-1,1]$, also auch zwischen 0 und $f(b)$ an.

e), f) Beide Aussagen sind wahr. Als stetige Funktion ist f beschränkt und bekanntermaßen Riemann-integrierbar. Die Funktion $F(x) := \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ ist wohldefiniert und eine Stammfunktion von f nach dem HDI.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$