Herbst 09 Themennummer 3 Aufgabe 5 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Finden Sie die allgemeine Lösung des linearen homogenen Systems

$$\dot{\omega} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \omega$$

für $\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \lambda < 0$. Welchen Typs ist das Gleichgewicht $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$?
Skizzieren Sie das Phasenportrait, begründen Sie seine Hauptmerkmale.

Lösungsvorschlag:

Wir berechnen das Matrixexponential. Da der angegebene Jordanblock schon in Normalform ist, erhalten wir $\begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$. Die Spalten geben ein Fundamentalsystem. Die allgemeine Lösung ist also $\omega(t) = \begin{pmatrix} ae^{\lambda t} + bte^{\lambda t} \\ be^{\lambda t} \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$. Da $\lambda < 0$ ist, jeder Eigenwert der Strukturmatrix also negativen Realteil hat, ist das Gleichgewicht (0,0) asymptotisch stabil.

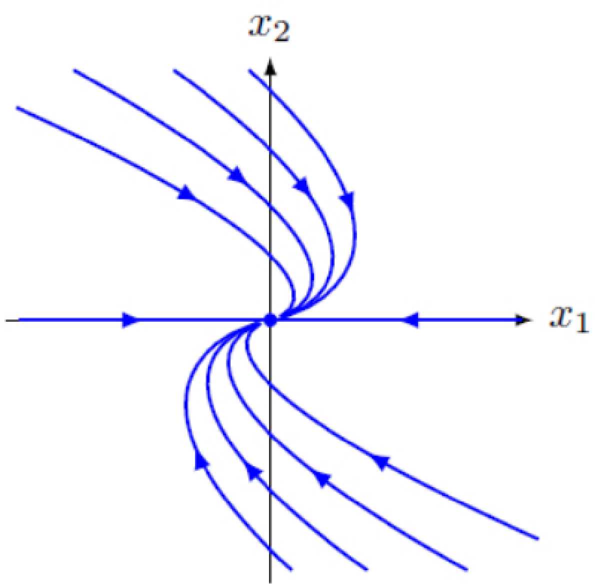

Abbildung 1: Skizze des Phasenportraits

Da die Strukturmatrix invertierbar ist, handelt es sich bei 0 um die einzige Ruhelage. Der einzige Eigenwert ist $\lambda < 0$, weshalb alle Lösungen mit exponentieller Geschwindigkeit in den Ursprung konvergieren. Der Eigenraum ist $\mathbb{R}e_1$, d. h. jede Lösung deren Anfangswert auf $\mathbb{R}e_1$ liegt, verläuft für alle Zeiten in $\mathbb{R}e_1$. Diese Gerade stellt eine Tangente dar, an die sich alle Lösungen annähern. Lösungen mit $\omega(0) = (x_1, x_2)$ erfüllen $a = x_1, b = x_2$. Für t nahe 0 verlaufen Lösungskurven tangential zu (x_1, x_2) und nähern sich für große t tangential an $\mathbb{R}e_1$ an.

$\mathcal{J.F.B.}$