Herbst 09 Themennummer 3 Aufgabe 4 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

> Sei G ein Gebiet mit $G \subset E := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$; f sei eine auf G holomorphe Funktion, die auf E durch $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ gegeben ist. Die Koeffizienten der Reihe seien alle nichtnegativ und der Konvergenzradius der Reihe sei 1. Zeigen Sie, dass $1 \notin G$. (Hinweis: Entwickeln Sie f um $\frac{1}{2}$ und untersuchen Sie den Konvergenzradius dieser Reihe unter der Annahme, dass 1 ein regulärer Punkt von f sei.)

Lösungsvorschlag:

Natürlich folgt aus $|1| \not< 1$ auch $1 \notin E$ und wegen $G \subset E$ daraus $1 \notin G$. Vermutlich ist dies ein Fehler in der Aufgabenstellung und es sollte $E \subset G$ heißen, was wir im Folgenden annehmen werden. Die restlichen Voraussetzungen (außer $G \subset E$) sollen weiterhin gelten.
Sei 1 ein regulärer Punkt. Dann ist 1 ein innerer Punkt und es gibt ein $\varepsilon > 0$ mit $E \cup B_\varepsilon(1) \subset G$. Insbesondere gibt es ein $\delta > \frac{1}{2}$ mit $B_\delta(\frac{1}{2}) \subset G$. Der Konvergenzradius R der Potenzreihenentwicklung von f muss dann strikt größer als $\frac{1}{2}$ sein. Insbesondere liegt 1 im Konvergenzkreis. Weiter ist $f^{(k)}(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{n+k} \frac{(n+k)!}{n!} z^n$ für $|z| < 1, k \in \mathbb{N}_0$. Entwickeln wir f um $\frac{1}{2}$ so folgt $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(\frac{1}{2})(z - \frac{1}{2})^k$. Setzen wir nun $z = 1$ und die obigen Darstellungen von $f^{(k)}$ ein, so folgt

$$\begin{aligned} f(z) &\overset{(1)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} \frac{(n+k)!}{n!\,k!} \frac{1}{2^n} \frac{(2z-1)^k}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+k}}{2^{n+k}} \binom{n+k}{n} (2z-1)^k \\ &\overset{*}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{n+k}}{2^{n+k}} \binom{n+k}{n} (2z-1)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{a_k}{2^k} \binom{k}{n} (2z-1)^{k-n} \\ &\overset{*}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{a_k}{2^k} \binom{k}{n} (2z-1)^{k-n} \overset{(2)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \end{aligned}$$

unter Verwendung von

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{a_k}{2^k} \binom{k}{n} (2z-1)^{k-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{2^k} \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} 1^n (2z-1)^{k-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{2^k} (1 + 2z - 1)^k.$$

Dabei war die Umordnung der Reihen in $*$ dadurch gerechtfertigt, dass alle Summanden nichtnegativ sind.
Darstellung (1) konvergiert nun für $\frac{1}{2} - R < z < \frac{1}{2} + R$, also insbesondere für ein $z > 1$. Darstellung (2) divergiert dagegen für $z > 1$, ein Widerspruch.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$