Herbst 09 Themennummer 3 Aufgabe 3 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

> Berechnen Sie unter Verwendung eines Integrationsweges, der von 0 über R über $re^{i2\pi/3}$ zurück nach 0 verläuft, das Integral
> $$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}.$$

Lösungsvorschlag:

Wir betrachten für $R > 1$ $\gamma_R = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ mit $\gamma_1 : [0, R] \ni t \mapsto t \in \mathbb{C}$, $\gamma_2 : [0, 2\pi] \ni t \mapsto Re^{\frac{ti}{3}} \in \mathbb{C}$ und $\gamma_3 : [0, R] \ni t \mapsto (R-t)e^{\frac{2\pi i}{3}}$. Für $R > 1$ berührt der Weg keine Singularitäten der meromorphen Fortsetzung $f : \mathbb{C}\backslash S \to \mathbb{C}, z \mapsto \dfrac{1}{1+z^3}$, mit der Nennernullstellenmenge $S = \{-1, e^{\frac{\pi i}{3}}, e^{\frac{5\pi i}{3}}\}$, die nur Elemente mit Betrag 1 enthält.
Die Wege γ_R sind geschlossen, stückweise stetig differenzierbar, berühren keine Polstellen von f und umkreisen lediglich die Singularität bei $e^{\frac{\pi i}{3}}$ und diese einmal in positivem Umlaufsinn. Die Funktion f ist bis auf die endliche Menge S holomorph auf der offenen, konvexen Menge $\mathbb{C}$. Wir können das Integral also mit dem Residuensatz berechnen. Dafür berechnen wir das Residuum von f bei $e^{\pi i}$. Weil der Nenner verschwindet, der Zähler aber nicht, handelt es sich um einen Pol erster Ordnung (einfache Nullstelle) und das Residuum ist $\dfrac{1}{3e^{\frac{2\pi i}{3}}} = \frac{1}{3}e^{\frac{4\pi i}{3}}$. Nach dem Residuensatz ist für jedes $R > 1$ der Wert des Integrals von f über γ_R durch $\frac{2\pi i}{3}e^{\frac{4\pi i}{3}}$ gegeben.
Einsetzen der Definition liefert $\int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_0^R \frac{1}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$, was für $R \to \infty$ gegen den gesuchten Integralwert konvergiert, weil das Integral von f über die positive Halbachse existiert (Nenner ist nach unten durch 1 beschränkt und hat Grad 3, während Zähler Grad 0 hat).
Das Integral über γ_2 schätzen wir ab, die Länge dieser Kurve ist durch $\frac{2\pi}{3}R$ gegeben. Alle Punkte in der Spur des Weges haben Betrag R und wir können mit der umgekehrten Dreiecksungleichung für diese Punkte abschätzen: $|f(z)| \leq \frac{1}{R^3-1}$. Nach der Standardungleichung folgt $0 \leq |\int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z| \leq \frac{2\pi R}{3R^3-3}$, was für $R \to \infty$ gegen 0 konvergiert.
Wir setzen wieder die Definition an und erhalten $\int_{\gamma_3} f(z)\mathrm{d}z = \int_0^R -\frac{1}{1+(R-t)^3}e^{\frac{2\pi i}{3}}\,\mathrm{d}t$. Substitution $x = R - t$ und Tausch der Integrationsgrenzen führt auf das Integral $-e^{\frac{2\pi i}{3}}\int_0^R \frac{1}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$.
Daher ist $\frac{2\pi i}{3}e^{\frac{4\pi i}{3}} = \int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_3} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z + (1-e^{\frac{2\pi i}{3}})\int_0^R \frac{1}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$ für alle $R > 1$. Grenzwertübergang $R \to \infty$ liefert $\frac{2\pi i}{3}e^{\frac{4\pi i}{3}} = (1-e^{\frac{2\pi i}{3}})\int_0^\infty \frac{1}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$, unser Integral hat also den Wert

$$\frac{2\pi i}{3-3e^{\frac{2\pi i}{3}}}e^{\frac{4\pi i}{3}} = 2\pi i\frac{2e^{\frac{4\pi i}{3}}}{6-6e^{\frac{2\pi i}{3}}} = 2\pi\frac{\sqrt{3}-i}{9-3\sqrt{3}i} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

J.F.B.