Herbst 09 Themennummer 3 Aufgabe 2 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Seien (a_n) und (b_n) Folgen komplexer Zahlen mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n| < \infty.$$

Zeigen Sie, dass das Produkt

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{z-a_n}{z-b_n}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ außerhalb des Abschlusses von $\{b_1, b_2, ...\}$ konvergiert.

Lösungsvorschlag:

Sei $B := \overline{\{b_1, b_2, ...\}}$ und $z \in \mathbb{C}\backslash B$ beliebig aber fest gewählt, dann ist $z \neq b_n$ und daher $z - b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, weshalb jeder Faktor definiert ist. Für $M \in \mathbb{N}$ bezeichne $z_M := \prod\limits_{n=1}^{M} \frac{z-a_n}{z-b_n}$, dann müssen wir zeigen, dass $(z_M)_{M\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Wir betrachten die Teleskopreihe $\sum\limits_{M=1}^{\infty} z_{M+1} - z_M$. Die Reihe konvergiert genau dann, wenn $(z_M)_{M\in\mathbb{N}}$ konvergiert (und zwar gegen $\lim\limits_{M\to\infty} z_M - z_1$). Wir werden zeigen, dass die Reihe absolut konvergiert, wonach sie natürlich auch konvergent ist.
Wir formen zunächst

$$\frac{z-a_n}{z-b_n} = \frac{z-b_n}{z-b_n} + \frac{b_n-a_n}{z-b_n} = 1 + \frac{b_n-a_n}{z-b_n}$$

um. Daher ist

$$|z_{M+1} - z_M| = \left| z_M \left(1 + \frac{b_{M+1} - a_{M+1}}{z - b_{M+1}}\right) - z_M \right| = |z_M| \frac{|b_{M+1} - a_{M+1}|}{|z - b_{M+1}|}.$$

Da $z \notin B$ ist, finden wir ein $c > 0$ mit $|z - b_n| \geq c$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir zeigen als Nächstes die Beschränktheit von $(z_M)_{M\in\mathbb{N}}$:
Es gilt

$$|z_M| = \prod_{n=1}^{M} \left| 1 + \frac{b_n - a_n}{z - b_n} \right| \leq \prod_{n=1}^{M} 1 + \frac{|b_n - a_n|}{c} =: P_M.$$

Jeder Faktor im zuletztstehenden Produkt ist reell und größer oder gleich 1, demnach auch P_M für alle $M \in \mathbb{N}$. Wir betrachten $\ln(P_M) = \sum\limits_{n=1}^{M} \ln\left(1 + \frac{|b_n-a_n|}{c}\right)$.
Wir zeigen als Nächstes $\ln(1+a) \leq 2a$ für $a \geq 0$. Wir betrachten $f(x) := \ln(1+x) - 2x$ auf $[0,\infty)$ und erhalten $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 2 \leq \frac{1}{1+0} - 2 = -1$. Also stellen wir fest, dass f auf $[0,\infty)$ streng monoton fällt. Wegen $f(0) = 0$ folgt $\ln(1+x) \leq 2x$.
Damit ist

$$\ln(P_M) = \sum_{n=1}^{M} \ln\left(1 + \frac{|b_n - a_n|}{c}\right) \leq \sum_{n=1}^{M} \frac{2}{c}|b_n - a_n| \leq \frac{2}{c} \sum_{n=1}^{\infty} |b_n - a_n| < \infty.$$

Insbesondere ist

$$|z_M| = P_M = e^{\ln P_M} \leq e^{\frac{c}{2}\sum\limits_{n=j}^{\infty} 1|b_n - a_n|} =: C < \infty$$

für alle $M \in \mathbb{N}$, d. h. $(z_M)_{M\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt.
Wir schätzen also weiter ab und folgern

$$|z_{M+1} - z_M| = |z_M| \frac{|b_{M+1} - a_{M+1}|}{|z - b_{M+1}|} \leq \frac{C}{c} |b_{M+1} - a_{M+1}|.$$

Damit ist

$$\sum_{M=1}^{\infty} |z_{M+1} - z_M| \leq \frac{C}{c} \sum_{M=1}^{\infty} |b_{M+1} - a_{M+1}| = \frac{C}{c} \sum_{n=2}^{\infty} |b_n - a_n| < \infty,$$

weshalb $\sum\limits_{M=1}^{\infty} z_{M+1} - z_M$ absolut konvergiert und damit konvergiert. Das bedeutet

$$\lim_{n\to\infty} z_1 + \sum_{M=1}^{n} z_{M+1} - z_M = z_1 + \lim_{n\to\infty} z_{n+1} - z_1 = \lim_{n\to\infty} z_{n+1}$$

existiert, woraus auch die Konvergenz von $(z_M)_{M\in\mathbb{N}}$ folgt, was zu zeigen war.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$