Herbst 09 Themennummer 2 Aufgabe 3 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

a) Finden Sie die Laurentreihenentwicklung der Funktion

$$f(z) = \frac{1}{(z+2)^3(z^2+1)}$$

um $z_0 = -2$. Bestimmen Sie den Konvergenzbereich der gefundenen Laurentreihe.

b) Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_{|z+1|=2} f(z)\mathrm{d}z$. Der Integrationsweg wird in positiver Richtung (gegen den Uhrzeigersinn) durchlaufen.

Lösungsvorschlag:

a) Wir entwickeln zunächst $\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{2i}\frac{1}{z-i} - \frac{1}{2i}\frac{1}{z+i}$ um $z_0 = -2$. Dazu nutzen wir die geometrische Reihe und $\frac{1}{z-i} = \frac{1}{z+2-(2+i)} = -\frac{1}{2+i}\frac{1}{1-\frac{z+2}{2+i}}$ sowie $\frac{1}{z+i} = \frac{1}{z+2-(2-i)} = -\frac{1}{2-i}\frac{1}{1-\frac{z+2}{2-i}}$. Für $|z+2| < |2-i| = \sqrt{5} = |2+i|$ folgt

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{2-4i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+2}{2+i}\right)^n + \frac{1}{4i+2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+2}{2-i}\right)^n.$$

Daher ist die Laurent-Entwicklung von f um $z_0 = -2$

$$\frac{1}{(z+2)^3}\cdot\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(2-4i)(2+i)^n} + \frac{1}{(4i+2)(2-i)^n}\right)(z+2)^{n-3}.$$

Diese Reihe konvergiert auf dem maximalen offenen Kreisring, der im Holomorphiegebiet von f, also in $\mathbb{C}\backslash\{-2,-i,i\}$, enthalten ist.
Wir untersuchen als Nächstes das Konvergenzverhalten auf dem Rand. Dazu schreiben wir $2-i = \sqrt{5}e^{it}$ in Polarform, mit $t \in (\pi, 2\pi)$ und formen um:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(2-4i)(2+i)^n} + \frac{1}{(4i+2)(2-i)^n} &= \frac{(2-i)^n(4i+2) + (2-4i)(2+i)^n}{20\cdot 5^n}\\
&= \frac{(2-i)^n(4i+2) + \overline{(2-i)^n(4i+2)}}{20\cdot 5^n}\\
&= \frac{\text{Re }((2-i)^{n+1}2i)}{10\cdot 5^n} = -\frac{\text{Im }((2-i)^{n+1})}{5^{n+1}}\\
&= -\frac{\sin((n+1)t)}{\sqrt{5}^{n+1}}i.
\end{aligned}$$

Gilt für $z \in \mathbb{C}$ nun $|z+2| = \sqrt{5}$, so erhalten wir für $w = \frac{z+2}{\sqrt{5}}$ mit $|w| = 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(2-4i)(2+i)^n} + \frac{1}{(4i+2)(2-i)^n}\right)(z+2)^{n-3} = -\frac{i}{(z+2)^4}\sum_{n=0}^{\infty}\sin((n+1)t)w^n.$$

Diese Reihe divergiert nach dem Trivialkriterium, da $\sin((n+1)t)$ keine Nullfolge ist. Also konvergiert die Laurentreihe genau für $0 < |z+2| < \sqrt{5}$.

b) Wir parametrisieren den Weg mittels $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{C}, \gamma(t) = -1 + 2e^{it}$. Da f holomorph auf $\mathbb{C}\backslash\{-2, -i, i\}$ ist und $\mathbb{C}$ offen sowie konvex ist, während γ ein geschlossener und glatter Weg im Holomorphiegebiet von f ist, können wir den Residuensatz benutzen. Alle drei Singularitäten von f werden von γ umschlossen, jede genau einmal in positivem Umlaufsinn. Wir bestimmen die Residuen.
Der Zähler verschwindet nirgends, -2 ist dreifache Nullstelle des Nenners, also Polstelle dritter Ordnung, $\pm i$ sind einfache Nullstellen des Nenners, also Polstellen erster Ordnung. Für das Residuum in -2 betrachten wir die obige Laurententwicklung und bestimmen den Koeffizienten von $n = 2$, nämlich $\frac{11}{125}$. Für die anderen beiden Residuen berechnen wir $\lim\limits_{z\to\pm i} f(z)(z \pm i) = \frac{1}{(\pm i+2)^3 \cdot (\pm 2i)}$. Die Summe der Residuen (gewichtet mit der Windungszahl, die jeweils 1 beträgt) ist 0. Nach dem Residuensatz beträgt das Integral $2\pi i \cdot 0 = 0$.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$