Herbst 09 Themennummer 2 Aufgabe 4 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Es sei α reell.

a) Es bezeichne γ den positiv orientierten Halbkreis um den Ursprung vom Radius $R > 0$ mit Anfangspunkt $z = +R$ und Endpunkt $z = -R$. Zeigen Sie:

$$\lim_{R\to+\infty} \int_\gamma \frac{e^{i\alpha z}}{1+z^2} \mathrm{d}z = 0 \qquad \text{für } \alpha > 0.$$

b) Folgern Sie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{1+x^2} \,\mathrm{d}x = \pi e^{-\alpha} \qquad \text{für } \alpha > 0.$$

c) Berechnen Sie das Integral aus (b) auch für $\alpha \leq 0$.

Lösungsvorschlag:

a) Der Weg γ verläuft nur in der oberen, abgeschlossenen Halbebene und durchläuft nur Punkte des Betrags R. Für $R > 1$ wird keine Singularität des Integranden durchlaufen (diese sind $\pm i$). Außerdem beträgt die Weglänge πR.
Wir benutzen die Standardabschätzung. Für alle z in der Spur ist $|1 + z^2| \geq |1 - |z^2|| = R^2 - 1$ sowie $|e^{i\alpha z}| = e^{\mathrm{Re}\, i\alpha z} = e^{-\alpha \mathrm{Im}\, z} \leq 1$ (wegen $\alpha > 0$). Nach der Standardabschätzung ist also

$$0 \leq \left| \int_\gamma \frac{e^{i\alpha z}}{1+z^2} \mathrm{d}z \right| \leq \pi R \cdot \frac{1}{R^2-1} = \frac{\pi R}{R^2-1} \overset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Aus dem Schachtelungssatz/Sandwichlemma folgt $\lim\limits_{R\to+\infty} \int_\gamma \frac{e^{i\alpha z}}{1+z^2} \mathrm{d}z = 0$ für $\alpha > 0$.

b) Wir nehmen zu γ aus a) die Strecke $[-R, R]$ hinzu (parametrisiert durch $[-R, R] \ni t \mapsto t$) um geschlossene, stückweise stetig differenzierbare Wege zu erhalten, die durch keine Singularität des Integranden verlaufen. Dieser ist holomorph auf der offenen, konvexen Menge $\{z \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Im}\, z > -1\}$, wenn man von der einzelnen Singularität i absieht. Der Residuensatz ist also anwendbar, weshalb das Integral über den kombinierten Weg durch $2\pi i \ \mathrm{Res}_i(\frac{e^{i\alpha z}}{1+z^2})$ gegeben ist. Bei i handelt es sich um einen Pol erster Ordnung (einfache Nennernullstelle, aber Zähler verschwindet nicht). Die Polformel liefert als Integralwert daher $2\pi i \frac{e^{i\alpha i}}{2i} = \pi e^{-\alpha}$. Für $R \to +\infty$ verschwindet nach a) der Beitrag von γ zum Integral für $\alpha > 0$, weshalb der Grenzwert des Integrals längs der Strecke mit dem des Integrals über den geschlossenen Weg übereinstimmt. Das liefert die Aussage.

c) Für negative α benutzen wir die Achsensymmetrie des Kosinus um $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{1+x^2} \,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos((-\alpha)x)}{1+x^2} \,\mathrm{d}x = \pi e^{-(-\alpha)} = \pi e^{\alpha}$ zu erhalten (da dann $-\alpha > 0$ ist). Für $\alpha = 0$ berechnen wir wegen $\cos(0) = 1$ und $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ explizit $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x = \lim\limits_{b\to+\infty} \lim\limits_{a\to-\infty} \arctan(b) - \arctan(a) = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi = \pi e^0$. Insgesamt folgt also $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{1+x^2} \,\mathrm{d}x = \pi e^{-|\alpha|}$.

$\mathcal{J.F.B.}$