Herbst 09 Themennummer 2 Aufgabe 3 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Für $|z| < r$ mit $r > 0$ sei $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konvergent.

a) Beweisen Sie für $0 < \rho < r$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\phi})|^2 \,\mathrm{d}\phi = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \rho^{2n}.$$

Hinweis: $\int_0^{2\pi} e^{ik\phi} \,\mathrm{d}\phi = 0$ für $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$.

b) Folgern Sie: Sei $\rho \in (0, r)$ fest. Ist $P \in \mathbb{C}[z]$ ein Polynom d-ten Grades, so ist

$$\int_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\phi}) - P(\rho e^{i\phi})|^2 \,\mathrm{d}\phi$$

minimal für $P(z) = \sum_{n=0}^{d} a_n z^n$.

Lösungsvorschlag:

a) Wir formen zunächst $|f(\cdot)|^2$ etwas um. Dazu beachte man, dass $B_\rho(0)$ zum Konvergenzkreis der Potenzreihe gehört und, dass daher die Potenzreihe absolut und gleichmäßig auf $B_{\frac{r+\rho}{2}}(0)$ konvergiert. Außerdem hat die Potenzreihe $g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} z^n$ den gleichen Konvergenzradius wie f. Wegen $|z| = |\overline{z}|$ konvergiert für $|z| < r$ also auch $g(\overline{z})$ absolut.
Mit dem Cauchyprodukt, das wegen der absoluten Konvergenz anwendbar ist, folgt $|f(z)|^2 = f(z)\overline{f(z)} = f(z)g(\overline{z})$, was auf $\overline{B_{\frac{r+\rho}{2}}(0)}$ absolut und gleichmäßig konvergiert. Wir berechnen $|f(\rho e^{i\phi})|^2$. Dazu beachte man $|\rho e^{it}| = \rho < \frac{r+\rho}{2} < r$ sowie $\overline{\rho e^{i\phi}} = \rho e^{-i\phi}$.

$$|f(\rho e^{i\phi})|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n e^{in\phi} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} \rho^n e^{-in\phi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{in\phi}$$

für gewisse $b_n \in \mathbb{C}$.
Da die Konvergenz gleichmäßig ist, dürfen wir das Integral gliedweise berechnen. Es folgt $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\phi})|^2 \,\mathrm{d}\phi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in\phi} \,\mathrm{d}\phi = b_0$. Wir müssen also nur b_0 mit dem Cauchy-Produkt berechnen. Es ist $b_0 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \rho^k e^{ik\phi} \overline{a_k} \rho^k e^{-ik\phi} = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 \rho^{2k} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \rho^{2n}$ wie zu zeigen war.

b) Wir definieren $g(z) := f(z) - P(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ mit $b_n = a_n$ für $n > d$, was für $|z| < r$ konvergiert. Aus a) folgt, dass das Integral durch $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |b_n|^2 \rho^{2n}$ gegeben ist.
Durch P werden nur $b_0, ..., b_d$ beeinflusst. Die Reihe wird natürlich minimal, wenn möglichst viele Koeffizienten verschwinden. Ist $P(z) = \sum\limits_{n=0}^{d} c_n z^n$, so ist $b_n = a_n - c_n = 0 \iff a_n = c_n$ für $0 \leq n \leq d$, also folgt $P(z) = \sum\limits_{n=0}^{d} a_n z^n$ für das Polynom, das das Integral minimiert.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$