Herbst 09 Themennummer 2 Aufgabe 2 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Gegeben sei die skalare Differentialgleichung

$$x'(2x^3 + 2x + 2xt^2) = -2t^3 - 2x^2t.$$

Man zeige, dass jede Lösung $x(t)$

a) beschränkt bleibt,

b) nicht für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$ existiert.

Hinweis: Man finde ein geeignetes erstes Integral $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, so dass $F(x(t), t)$ unabhängig von t ist.

Lösungsvorschlag:

Umformung der Gleichung liefert $x'(2x^3+2x+2xt^2)+2t^3+2x^2t = 0$, was eine exakte Differentialgleichung ist. Als Erstes Integral eignet sich die Funktion $\Phi(x,t) = \frac{1}{2}x^4 + x^2 + x^2t^2 + \frac{1}{2}t^4$. Man rechnet nun einfach nach, dass die Ableitung von $t \mapsto \Phi(x(t), t)$ für jede Lösung verschwindet. Man beachte, dass Φ koerzitiv ist, also $\Phi(x,t) \to \infty$, für $\|(x,t)\| \to \infty$ gilt.

a) Sei $x(t)$ eine Lösung, die für ein t_0 definiert ist. Dann muss $\Phi(x(t), t) = \Phi(x(t_0), t_0) =: c$ für alle t im Lösungsintervall gelten. Nun ist $\Phi(x(t), t) \geq \frac{1}{2}x(t)^4$, also kann $\Phi(x(t), t) = c$ nur für $|x(t)| \leq \sqrt[4]{2c}$ delten und x ist gegen diesen Wert beschränkt.

b) Völlig analog ist wegen $\Phi(x(t), t) \geq \frac{1}{2}t^4$ das Lösungsintervall durch die gleiche Schranke wie in a) beschränkt.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$