**Herbst 09 Themennummer 2 Aufgabe 1 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)**

Man besteimme alle Gleichgewichtspunkte des ebenen autonomen Systems

$$\begin{aligned} x' &= 2 - x\,y \\ y' &= \frac{x}{2} - y^3 \end{aligned}$$

und untersuche jeden der Gleichgewichtspunkte auf Stabilität, asymptotische Stabilität bzw. Instabilität.

**Lösungsvorschlag:**

Damit die erste Gleichung verschwindet, muss $2 = xy$ sein. Insbesondere ist $x \neq 0 \neq y$ und wir dürfen dividieren, was $x = \frac{2}{y}$ liefert.
Eingesetzt in die zweite Gleichung erhalten wir $0 = \frac{1}{y} - y^3 \iff 0 = 1 - y^4 \iff y = \pm 1$ und daraus dann $x = \pm 2$. Also gibt es genau zwei Gleichgewichtspunkte, nämlich $(-2, -1)$ und (2,1).
Wir versuchen zunächst Linearisierung und berechnen die Jacobimatrix der Strukturfunktion $J(x, y) = \begin{pmatrix} -y & -x \\ \frac{1}{2} & -3y^2 \end{pmatrix}$. Die Eigenwerte der Matrix $J(-2, -1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & -3 \end{pmatrix}$ sind die Nullstellen von $(1 - \lambda)(-3 - \lambda) - 1 = \lambda^2 + 2\lambda - 4$, also $\lambda_\pm = -1 \pm \sqrt{5}$. Insbesondere ist $\lambda_+ > 0$ und (-2,-1) ist instabil.
Analog sind die Eigenwerte der Matrix $J(2,1) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ \frac{1}{2} & -3 \end{pmatrix}$ die Nullstellen von $(-1 - \lambda)(-3 - \lambda) - \frac{1}{2} = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2$, also ist der einzige Eigenwert $\lambda = -2$, welcher negativ ist. Daher ist (2,1) asymptotisch stabil und insbesondere stabil.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$