

**Herbst 09 Themennummer 1 Aufgabe 5 im Bayerischen Staatsexamen  
Analysis (vertieftes Lehramt)**

Sei  $f$  meromorph auf  $\mathbb{C}$  und ohne Pol auf der reellen Achse. Zudem gelte  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$ , falls  $\Im(z) \geq 0$ , wobei  $\Im(z) = y$  für  $z = x + iy$ .

- a) Sei  $\Gamma_R$  der Weg in der oberen Halbebene gegeben durch  $|z| = R$ , orientiert im positiven Sinne. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} f(z) e^{iz} dz = 0.$$

- b) Verwenden Sie (a) um das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ix} dx$$

durch die Residuen von  $f$  auszudrücken.

**Lösungsvorschlag:**

- a) Da  $f$  höchstens abzählbar viele Pole hat, gibt es höchstens abzählbar viele Werte  $R > 0$  für die das Wegintegral nicht definiert ist. Den Limes können wir trotzdem untersuchen.

Wir parametrisieren die Kurve mittels  $[0, \pi] \ni t \mapsto Re^{it}$  und erhalten  $I_R := \int_{\Gamma_R} f(z) e^{iz} dz = \int_0^\pi f(Re^{it}) e^{iRe^{it}} iRe^{it} dt$ . Anwendung der Standardabschätzung liefert  $|I_R| \leq R \varepsilon_R \int_0^\pi e^{-R \sin t} dt$  für  $\varepsilon_R := \max_{t \in [0, \pi]} |f(\Gamma_R(t))|$ , was nach Voraussetzung für

$R \rightarrow \infty$  gegen 0 konvergiert.

Wir untersuchen  $\int_0^\pi e^{-R \sin t} dt$ . Wegen der Achsensymmetrie des Sinus bezüglich  $\frac{\pi}{2}$  ist dieses Integral das Doppelte des Integrals  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin t} dt$ . Auf  $[0, \frac{\pi}{2}]$  ist der Sinus konkav und erfüllt  $\sin(\lambda \cdot \frac{\pi}{2} + (1 - \lambda) \cdot 0) \geq \lambda \sin(\frac{\pi}{2}) + (1 - \lambda) \sin(0) = \lambda$  für alle  $\lambda \in [0, 1]$ . Für  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$  wählen wir  $\lambda = \frac{t}{\frac{\pi}{2}}$  und erhalten  $\sin(t) \geq \frac{2t}{\pi}$ .

Wir erhalten  $\int_0^\pi e^{-R \sin t} dt \leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2R}{\pi} t} dt = 2 \left[ -\frac{\pi}{2R} e^{-\frac{2R}{\pi} t} \right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{R} (1 - e^{-R}) \leq \frac{\pi}{R}$ .

Insgesamt folgt also  $0 \leq |I_R| \leq \pi \varepsilon_R \rightarrow 0$  für  $R \rightarrow \infty$  und daraus die Aussage.

- b) Wir betrachten die Kurven  $\gamma_R : [-R, R] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto t$  und die Wegintegrale von  $f(z) e^{iz}$  längs dieser. Die Kurven  $\gamma_R + \Gamma_R$  sind geschlossen und stückweise stetig differenzierbar. Da  $f$  meromorph auf  $\mathbb{C}$  ist können wir den Residuensatz auf jede dieser Kurven anwenden, die keinen Pol durchläuft (was wieder für alle bis auf abzählbar viele Ausnahmen zutrifft). Falls das Integral existiert, so gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ix} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) e^{iz} dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R + \Gamma_R} f(z) e^{iz} dz = 2\pi i \sum_{s \in S} \text{Res}_s(f(z) e^{iz}),$$

wobei  $S$  die Menge der Singularitäten in der offenen oberen Halbebene  $\{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}$  bezeichne.

*J.F.B.*