Herbst 09 Themennummer 1 Aufgabe 4 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

a) Bestimmen Sie ein maximales Gebiet $G \subset \mathbb{C}\backslash\{-i, i\}$, das die Einheitskreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ enthält, und auf dem die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

eine Stammfunktion F besitzt.

b) Falls $F(0) = 0$ zeigen Sie $F(\tan(z)) = 0$ für alle $z \in G' = \{z \in \mathbb{C} : \tan(z) \in G\}$.

Lösungsvorschlag:

a) Wir beginnen damit die Residuen in den Nullstellen zu berechnen. Beide Singularitäten sind Nullstellen erster Ordnung des Nenners, wobei der Zähler nie verschwindet, weswegen es sich bei beiden um Pole erster Ordnung handelt. Nach der Polformel ist $\operatorname{Res}_f(i) = \frac{1}{2i}$ und $\operatorname{Res}_f(-i) = -\frac{1}{2i}$.
Wir wählen $G := \mathbb{C}\backslash S$, wobei $S := \{ti : |t| \geq 1\}$ sei. Natürlich ist G offen, als Komplement der abgeschlossenen Menge S und G ist sternförmig bezüglich 0, also zusammenhängend und nichtleer. Damit ist G ein Gebiet und natürlich gilt $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \subset G$.
G ist maximal. Würden wir einen Punkt $s \in S$ zu G hinzunehmen, so wäre der Weg $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C},\ \gamma(t) = \frac{s}{2} + \frac{|s|}{2}e^{it}$ geschlossen, stetig differenzierbar und dessen Spur würde in $G \cup \{s\}$ verlaufen. (γ ist der Kreis um den Mittelpunkt $\frac{s}{2}$ der 0 und s als höchsten und niedrigsten Punkt aufweist. Jeder andere Punkt besitzt einen von 0 verschiedenen Realteil.) Längs diesen Weges würde f nach dem Residuensatz ein Wegintegral von $\pm\pi$ besitzen (+ für Im $s > 0$ und − für Im $s < 0$), was von 0 verschieden ist. Dann kann f aber keine Stammfunktion besitzen.
f besitzt aber eine Stammfunktion F auf G, weil das Integral längs jeden geschlossenen Weges verschwindet, da keine Singularität umkreist werden kann.

b) Die angegebene Aussage ist FALSCH!
Diese Stammfunktion von f ist $F(z) = \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$, wobei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C},\ \gamma(t) = tz$ ist.
Sei $z \in (0, \frac{\pi}{2})$, dann ist $\tan(z) \in \mathbb{R} \subset G$ und $F(\tan(z)) = \int_0^1 f(t\tan(z)) \cdot \tan(z)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\tan(z)}{1+(t\tan(z))^2}\,\mathrm{d}t = [\arctan(t\tan(z))]_0^1 = \arctan(\tan(z)) - \arctan(0) = z \neq 0$.
Vermutlich sollte die Aufgabe sein $F(\tan(z)) = z$ zu zeigen.
Es ist zwar nicht Teil der Aufgabe, wir skizzieren aber kurz das Vorgehen. Für $z \in G'$ gilt $(F(\tan(z)))' = f(\tan(z)) \cdot \tan(z)' = 1$. Daraus folgt dann aus $F(0) = 0$ auch $F(\tan(z)) = z$, wenn G' ein Gebiet ist. Die Offenheit und $G' \neq \emptyset$ ist klar, Zusammenhang müsste noch bewiesen werden. Tatsächlich stellt man fest, dass $G' = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z \notin (\frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi)\}$, was nicht zusammenhängend ist. Dementsprechend kann $F(\tan(z)) = z$ auch nur auf dem Streifen $S := (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times \mathbb{R}$ gefolgert werden. Benutzt man dann aber die Periodizität des Tangens $\tan(z + k\pi) = \tan(z)$ für alle $z \in G', k \in \mathbb{Z}$ und betrachtet für jedes $z \in G'$ die komplexe Zahl $z - k\pi \in S$, wobei $k = \left\lfloor \text{Re } z - \frac{\pi}{2} \right\rfloor$, so folgt $F(\tan(z)) = F(\tan(z - k\pi)) = z - k\pi \neq z$, für $z \in G'\backslash S$.

$\mathcal{J.F.B.}$