

Herbst 09 Themennummer 1 Aufgabe 2 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)

Bestimmen Sie jeweils alle Lösungen $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$u'' - 10u' + 34u = 0$$

für die Randwertprobleme

- a) $u(0) = 0, u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1;$
- b) $u(0) = 0, u(\pi) = 1;$
- c) $u(0) = 0, u(\pi) = 0.$

Lösungsvorschlag:

Das zugehörige charakteristische Polynom $\lambda^2 - 10\lambda + 34$ besitzt die Nullstellen $5 \pm 3i$. Daher lautet die allgemeine reelle Lösung der Gleichung $u(t) = e^{5t}(a \cos(3t) + b \sin(3t))$ mit reellen a, b .

Aus $u(0) = 0$ folgt $0 = a$, das heißt für jedes der obigen Probleme müssen wir nur b bestimmen.

- a) Aus $u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ folgt $1 = -be^{\frac{5\pi}{2}} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$, also $b = -e^{-\frac{5\pi}{2}}$. Daher ist die einzige Lösung dieses Randwertproblems $u(t) = -e^{5t-\frac{5\pi}{2}} \sin(3t)$.
- b) Aus $u(\pi) = 1$ folgt $1 = e^{5\pi}(-a + 0) = 0$, ein Widerspruch. Dies Problem besitzt keine Lösung.
- c) Für jedes $b \in \mathbb{R}$ erfüllt $u(t) = be^{5t} \sin(3t)$ beide Bedingungen, ist also eine Lösung. Nach der Vorbetrachtung kann es keine weitere Lösung geben.

J.F.B.