

H09T1A1

Für die Differentialgleichung $u'(x) = \sqrt{1 - u(x)^2}$ bestimme jeweils alle Lösungen $u:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ zu den Anfangswerten

a) $u(0) = 1$

b) $u(0) = -1$

Lösung

$u \in [-1, 1]$ damit $\sqrt{1 - u^2}$ eine reellwertige Funktion definiert.

$$F : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, u \mapsto \sqrt{1 - u^2}, \quad f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}, u \mapsto \sqrt{1 - u^2} \in C^1(]-1, 1[, \mathbb{R})$$

$\Rightarrow u' = f(u), u(\tau) = \xi, (\tau, \xi) \in \mathbb{R} \times]-1, 1[$ hat eine maximal Lösung.

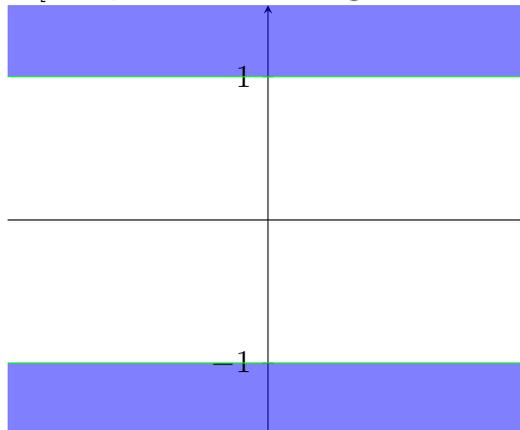
Auf $u' = F(u), u(\tau) = \xi$ ist der Existenz- und Eindeutigkeitssatz anwendbar.

Jede Lösung $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$ von $u' = F(u)$ nimmt nur Werte $\lambda(t) \in [-1, 1]$ an.

Da $\lambda'(t) = F(\lambda(t)) = \sqrt{1 - (\lambda(t))^2} \geq 0$ ist λ monoton steigend (mit $(\lambda(t))^2 \in [0, 1]$).

Zu a):

Mit $\lambda(0) = 1, \lambda$ monoton steigend, $\lambda(t) \in [-1, 1]$ bleibt auf dem Lösungsintervall $I = [0, \infty[$ nur $\lambda : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto 1$ als Lösung zu $u' = \sqrt{1 - u^2}, u(0) = 1$.



Zu b):

$\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto -1$ löst $u' = \sqrt{1 - u^2}, u(0) = -1$

Sei $\tau > 0$ und $\xi \in]-1, 1[$ und $\lambda_{(\tau, \xi)} : I_{(\tau, \xi)} \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine maximale Lösung zu $u' = f(u), u(\tau) = \xi$

Trennen der Variablen:

$$\int_{\xi}^{\lambda(t)} \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \int_{\tau}^t ds = \arcsin(u) \Big|_{\xi}^{\lambda(t)}, \quad \arcsin(\lambda(t)) = t - \tau + \arcsin(\xi)$$

$$\lambda(t) = \sin(t - \tau + \arcsin(\xi))$$

Test: $\lambda'(t) = \dots$

(Bild 2)

Maximales Lösungsintervall $I_{(\tau, \xi)} =]u(\tau, \xi), u(\tau, \xi) + \pi[$ so zu wählen, dass $\sin(t - \tau + \arcsin(\xi)) = -1$ und $\tau \in I_{(\tau, \xi)}$

Dies lässt sich nur durch Anstückeln zu einer Lösung von $u' = F(u)$, $u(0) = -1$ auf $[0, \infty[$ fortsetzen; somit sind dies alle derartige Lösungen (da jede Lösung $\neq -1$ dann lokal auch $u' = f(u)$, $u(\tau) = \xi$ mit $\xi \in]-1, 1[$ löst!).

(Bild 3)