Herbst 08 Themennummer 3 Aufgabe 5 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Sei $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ holomorph mit

$$f\left(\frac{1}{2n}\right) = 0 \text{ und } f\left(\frac{1}{2n+1}\right) = 1 \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass es eine Nullfolge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}\backslash\{0\}$ gibt mit

$$f(z_n) \to e^\pi \text{ für } n \to \infty.$$

(Hinweis: Welche Art Singularität muss f in 0 haben?)
Gibt es eine Funktion f mit obigen Eigenschaften.

Lösungsvorschlag:

0 kann keine hebbare Singularität von f sein, sonst würde nach dem Identitätssatz nämlich $f \equiv 0$ aus $f(\frac{1}{2n}), n \in \mathbb{N}$ folgen, im Widerspruch zu $f(\frac{1}{3}) = 1$. Es kann sich aber auch nicht um einen Pol handeln, da sonst $0 = f(\frac{1}{2n}) \to \infty$ für $n \to \infty$ gelten müsste, was auch nicht der Fall ist. Nach dem Satz von Casorati folgt die Aussage. Ja, es gibt solche Funktionen, ein Beispiel ist $f(z) := \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{z})$. Dann ist $f(\frac{1}{2n}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2n\pi) = 0$ und $f(\frac{1}{2n+1}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos((2n+1)\pi) = 1$.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$