Herbst 08 Themennummer 3 Aufgabe 4 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Die Koeffizienten c_n der Potenzreihe $\mathcal{F}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ seien durch die Rekursionsformel

$$c_n = \sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k} \text{ für } n \geq 2$$

und die Anfangsbedingungen $c_0 = 0, c_1 = 1$ definiert.

(a) Zeigen Sie: $\mathcal{F}(z) = z + \mathcal{F}(z)^2$.

(b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius von $\mathcal{F}(z)$.
Hinweis: Benutzen Sie Teil (a).

Lösungsvorschlag:

(a) Für alle z in $B_R(0)$, wobei R der Konvergenzradius sei, gilt

$$\mathcal{F}(z)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k} z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k} z^n = \sum_{n=2}^{\infty} c_n z^n$$

nach dem Cauchyprodukt und unter Verwendung von $c_0 = 0$. Also gilt $\mathcal{F}(z) = 0 + z + \sum_{n=2}^{\infty} c_n z^n = z + \mathcal{F}(z)^2$.

(b) Wir betrachten eine holomorphe Funktion $\mathcal{F} : \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < \delta\} \to \mathbb{C}$ mit $\mathcal{F}(z) = z + \mathcal{F}(z)^2$ für $z \in \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < \delta\}$ und $\delta > 0$ sowie $\mathcal{F}(0) = 0$. Für $n \geq 2$ und $z \in \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < \delta\}$ gilt

$$\mathcal{F}^{(n)}(z) = (\mathcal{F} \cdot \mathcal{F})^{(n)}(z) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathcal{F}^{(k)}(z)\mathcal{F}^{(n-k)}(z)$$

nach der Leibnizformel.
Wir setzen $c_n := \frac{\mathcal{F}^{(n)}(0)}{n!}$, dann ist $c_0 = 0, c_1 = \mathcal{F}'(0) = 1 + 2\mathcal{F}(0)\mathcal{F}'(0) = 1$ und für $n \geq 2$ gilt

$$c_n = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\mathcal{F}^{(k)}(0)\mathcal{F}^{(n-k)}(0) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\mathcal{F}^{(k)}(0)}{k!}\frac{\mathcal{F}^{(n-k)}(0)}{(n-k)!} = \sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k}.$$

Dies ist genau die angegebene Rekursionsvorschrift, d. h. finden wir eine holomorphe Funktion $\mathcal{F} : \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < \delta\} \to \mathbb{C}$ mit $\mathcal{F}(z) = z + \mathcal{F}(z)^2$ für alle $z \in D$ und $\mathcal{F}(0) = 0$, so gilt $\mathcal{F}(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\mathcal{F}^{(n)}(0)}{n!} z^n$ für $|z| < \delta$ und die Koeffizienten aus der Voraussetzung erfüllen $c_n = \frac{\mathcal{F}^{(n)}(0)}{n!}$. Der Konvergenzradius ist dann durch den Radius der maximalen offenen Kreisscheibe um 0 gegeben, auf die $\mathcal{F}$ holomorph fortgesetzt werden kann. Wir bestimmen zunächst eine Lösung der Funktionalgleichung aus (a).

Wir betrachten die biholomorphe Funktion $f : \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\ z > 0\} \to \mathbb{C}\backslash(-\infty,0], z \mapsto z^2$ und bezeichnen die Umkehrfunktion mit $\sqrt{z} := f^{-1}(z)$. (Holomorphie von f ist klar, Bijektivität sieht man in Polarform).
Nach der Lösungsformel quadratischer Gleichungen gilt für jedes $z \in B_R(0)$, dass $\mathcal{F}(z) = \frac{1+\sqrt{1-4z}}{2}$ oder $\mathcal{F}(z) = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2}$ ist. Für $z = 0$ muss $\mathcal{F}(z) = \sum_{n=0} c_n 0^n = c_0 = 0$ sein, also müssen wir die zweite Variante $\mathcal{F}(z) = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2}$ wählen.
Der Konvergenzradius ist $\frac{1}{4}$. Zunächst stellen wir fest, dass $\mathcal{F} : B_{\frac{1}{4}}(0) \to \mathbb{C},\ \mathcal{F}(z) := \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2}$ eine holomorphe Funktion darstellt, die der Gleichung aus (a) genügt und 0 fixiert. Wir werden nun zeigen, dass $\mathcal{F}$ keine holomorphe Fortsetzung auf eine größere Kreisscheibe besitzt. Dazu zeigen wir, dass $\frac{1}{4}$ ein singulärer Punkt ist.
Gäbe es eine holomorphe Fortsetzung g von $\mathcal{F}$ auf $\{z \in \mathbb{C} :\ |z| < R\}$ für ein $R > \frac{1}{4}$, so wäre $1-2\mathcal{F}(z)$ eine holomorphe Fortsetzung von $\sqrt{1-4z}$ auf $\{z \in \mathbb{C} :\ |z| < R\}$. Die Abbildung $\sqrt{}$:$\{z \in \mathbb{C} :\ |z-1| < 1\} \to \mathbb{C}$ besäße dann eine holomorphe Fortsetzung auf $\{z \in \mathbb{C} :\ |z-1| < 4R\}$, nämlich

$$\sqrt{w} = \sqrt{1 - 4\frac{1-w}{4}} = 1 - 2\mathcal{F}\left(\frac{1-w}{4}\right),$$

da aus $|1-w| < 4R$ auch $|\frac{1-w}{4}| < R$ folgt.
Ist $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x > 0$, so folgt $z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ und es ist $\mathrm{sgn}\ (\mathrm{Im}\ (z^2)) = \mathrm{sgn}\ (\mathrm{Im}\ z)$.
Wir hatten bereits gesehen, dass $\sqrt{}$: $\mathbb{C}\backslash(-\infty,0] \to \{z \in \mathbb{C} :\ \mathrm{Re}\ z > 0\}$ holomorph ist. Besitzt $\sqrt{}$ eine holomorphe Fortsetzung auf $\{z \in \mathbb{C} :\ |z-1| < 4R\}$, so ist $\sqrt{}$ zumindest auf $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 1-4R]$ holomorph und dort somit auch stetig. Diese Menge enthält zum Beispiel die negative reelle Zahl $r = \frac{1-4R}{2}$. Wir betrachten die Folgen $z_n := r + \frac{i}{n}$ und $w_n := r - \frac{i}{n}$, die für $n \to \infty$ gegen r konvergieren. Die Folgen $\sqrt{z_n}$ und $\sqrt{w_n}$ müssen konvergieren und den gleichen Grenzwert haben. Jedes Folgeglied von $\sqrt{z_n}$ hat positiven Real- und Imaginärteil, jedes Folgeglied von $\sqrt{w_n}$ hat positiven Realteil und negativen Imaginärteil. Der gemeinsame Grenzwert, muss also eine nichtnegative reelle Zahl sein.
Wir schreiben schließlich $\sqrt{z_n} = x_n + iy_n$, d. h. $r + \frac{i}{n} = x_n^2 - y_n^2 + 2ix_ny_n$ und lassen $n \to \infty$ konvergieren. Der linke Term konvergiert gegen r, der Realteil des Grenzwerts auf der rechten Seite muss wegen $y_n \to 0$ aber nichtnegativ sein, ein Widerspruch zu $r < 0$. Daher kann es keine stetige Fortsetzung und somit erst recht keine holomorphe Fortsetzung von $\sqrt{}$ auf $\{z \in \mathbb{C} :\ |z-1| < 4R\}$ geben.
Dann kann auch $\mathcal{F}$ nicht fortgesetzt werden und $\frac{1}{4}$ ist der Radius der maximalen Kreisscheibe um 0 auf der $\mathcal{F}$ holomorph sein kann und somit ist $\frac{1}{4}$ auch der Konvergenzradius der angegebenen Potenzreihe.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$