Herbst 08 Themennummer 3 Aufgabe 3 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Betrachtet wird das eben autonome System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\sin x\end{aligned} \tag{3}$$

um den Gleichgewichtspunkt (0,0).

(a) Finden Sie ein stetig differenzierbares $H = H(x, y)$, das auf den Lösungen von (3) konstant ist.
Hinweis: Suchen Sie ein H mit $\dot{x} = H_y,\ \dot{y} = -H_x$. Warum ist H dann konstant auf den Lösungen von (3)?

(b) Begründen Sie anschaulich, warum die Lösungskurven von $(x(t), y(t))$ von (3) in der Nähe von (0,0) geschlossen sind.
Hinweis: Untersuchen Sie H auf Extrema.

Lösungsvorschlag:

(a) Mit dem Hinweis wählen wir $H(x, y) := \frac{1}{2}y^2 - \cos x$, was eine $C^1(\mathbb{R}^2)$-Funktion ist. Ist $(x(t), y(t))$ eine Lösung, so gilt für $\gamma(t) := H((x(t), y(t))$, dass $\gamma'(t) = H_x((x(t), y(t))x'(t) + H_y((x(t), y(t))y'(t) = \sin(x(t))y(t) + y(t)(-\sin(x(t))) = 0$ ist, also ist γ konstant auf dem Lösungsintervall und damit H konstant auf $(x(t), y(t))$.

(b) Bei (0,0) handelt es sich um ein striktes (lokales) Minimum von H, denn (0,0) ist stationär und die Hessematrix $H_H(x, y) = \begin{pmatrix} \cos x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ist in (0,0) positiv definit. Da H eine Lyapunovfunktion ist, ist (0,0) ein stabiles Gleichgewicht. Es handelt sich aber nicht um ein attraktives Gleichgewicht, da aus $(x(t), y(t)) \to 0$ auch $H(x(0), y(0)) = H(x(t), y(t)) \to H(0,0) = -1$ folgt, was aber nicht für jede Anfangsbedingung um (0,0) gelten muss.
Wir finden also ein $\delta > 0$, sodass Anfangswerte mit $0 < \|(x_0, y_0)\| < \delta$ zu Lösungen führen, die sich nicht weiter als δ von 0 entfernen, aber auch nicht gegen 0 konvergieren. Die Lösung muss nach (a) dann in der Menge $\{(x, y) \in B_\delta(0,0) : y^2 - 2\cos x = y_0^2 - 2\cos x_0\}$ verlaufen, was eine kompakte Menge ist und die Ruhelage (0,0) nicht enthält. Diese Niveaulinien bilden geschlossene Linien, was man mit dem Satz über implizite Funktionen beweisen könnte. Nach der Klassifikation von Orbits muss die Lösung dann periodisch sein und der Orbit mit der Spur der Lösung übereinstimmen.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$